Giáo trình
Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Đặng Anh Tuấn

Hà Nội, ngày 18- 03- 2016

Mục lục

1 Phương trình truyền sóng **1**

1.1 Phương trình truyền sóng 1−chiều 1

1.1.1 Bài toán giá trị ban đầu 1

1.1.2 Bài toán biên hỗn hợp 5

1.2 Phương trình truyền sóng số chiều cao 9

1.2.1 Phương pháp trung bình cầu 9

1.2.2 Số chiều 3 11

1.2.3 Số chiều 2 13

1.2.4 Tính chất của nghiệm 15

1.2.5 Số chiều lẻ 17

1.2.6 Số chiều chẵn 23

1.2.7 Tính chất toàn cục 24

1.2.8 Nguyên lý Duhamel 29

1.3 Đánh giá năng lượng 32

Chương 1

Phương trình truyền sóng

1.1 Phương trình truyền sóng $1-$chiều

1.1.1 Bài toán giá trị ban đầu

Xét bài toán

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{1.1}$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi, u_t(\cdot, 0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

trong đó

- hằng số dương a được hiểu tốc độ lan truyền,
- $f \in C(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ được hiểu là ngoại lực,
- $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ lần lượt là trạng thái ban đầu và vận tốc ban đầu.

Họ các đường đặc trưng

$$x \pm at = C$$

đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu bài toán (1.1)-(1.2).
Trước hết ta xét trường hợp $f = 0$, bằng cách chuyển về dạng chính tắc bằng phép đổi biến

$$\xi = x - at, \eta = x + at$$

ta được $v(\xi,\eta) = u((\xi+\eta)/2, (\eta-\xi)/(2a))$ thỏa mãn

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Tích phân dần lên ta được nghiệm tổng quát $v = F(\xi) + G(\eta)$ hay

$$u(x,t) = F(x-at) + G(x+at)$$

với $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.
Từ nghiệm tổng quát ta nhận thấy vài điểm:

- $F(x-at)$ sẽ tiến về phía phải với tốc độ a, nên nó được gọi là sóng tiến (forward wave),
- $G(x+at)$ sẽ lùi lại về phía trái với tốc độ a, nên nó được gọi là sóng lùi (backward wave),
- nếu A, B, C, D là đỉnh của hình bình hành có các cạnh nằm trên các đường đặc trưng, cụ thể AB, CD nằm trên các đường đặc trưng dạng $x - at = C$, còn AC, BD nằm trên các đường đặc trưng dạng $x + at = C$, thì ta có công thức hình bình hành
$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

Quay trở lại việc giải bài toán (1.1)-(1.2) khi $f = 0$. Thay nghiệm tổng quát và các điều kiện ban đầu và giải ta thu được

- sóng tiến $F(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} - \dfrac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy + C$,
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy - C$.

Ta thu được công thức D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy.$$

Có thể thấy ngay tính trơn của $u(\cdot,t), t > 0$, bằng tính trơn của trạng thái ban đầu $u(\cdot,0)$ và tốt hơn một bậc so với độ trơn của vận tốc ban đầu $u_t(\cdot,0)$. Khác so với nghiệm của phương trình Laplace, hay nghiệm của phương trình truyền nhiệt, độ trơn

các nghiệm này đều bằng vô hạn khi ở bên trong miền xác định dù cho các điều kiện ban đầu hay điều kiện biên có độ trơn tồi.
Từ công thức D'Alembert, giá trị của u tại điểm $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ hoàn toàn tính được nhờ điều kiện ban đầu trong đoạn $[x-at, x+at]$ trên trục Ox. Đoạn $[x-at, x+at]$ này được gọi là miền phụ thuộc của nghiệm u tại điểm (x,t). Nó là đáy của tam giác phụ thuộc

$$C_1(x,t) = \{(y,s) : \ |y-x| \le a(t-s), 0 < s < t\}.$$

Ngoài ra, với mỗi điểm $(x_0, 0)$ các giá trị ban đầu tại đây sẽ ảnh hưởng đến giá trị của u tại các điểm (x,t) thỏa mãn

$$x_0 - at < x < x_0 + at.$$

Miền

$$\{(x,t) : \ x_0 - at < x < x_0 + at, t > 0\}$$

được gọi là miền ảnh hưởng của nghiệm u tại điểm $(x_0, 0)$.
Khi $f = 0$ ta không thấy được vai trò của tam giác ảnh hưởng.
Ta chuyển sang việc giải bài toán (1.1) − (1.2) trong trường hợp tổng quát. Tam giác cân $C_1(x,t)$ có hai cạnh bên

$$\begin{aligned} L_+ =& \{(y,s) : \ y = x + a(t-s), 0 \le s \le t\}, \\ L_- =& \{(y,s) : \ y = x - a(t-s), 0 \le s \le t\}, \end{aligned}$$

với đáy

$$L_0 = \{(y,0) : \ x - at \le y \le x + at\}.$$

Dùng công thức dạng DIV, dạng khác của công thức Green, cho

- trường $F = (-a^2 u_x, u_t)$
- miền $C_1(x,t)$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên

$$\nu(y,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1,a) & \text{khi } (y,s) \in L_+, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1,-a) & \text{khi } (y,s) \in L_-, \\ (0,-1) & \text{khi } (y,s) \in L_0, \end{cases}$$

có

$$\begin{aligned}\int_{C_1(x,t)} f(y,s)dyds &= \int_{C_1(x,t)} (u_{tt} - a^2 u_{xx})dyds \\ &= \int_{\partial C_1(x,t)} (u_t\nu_2 - a^2 u_x \nu_1)ds \\ &= \int_{L^+} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(u_t - au_x)d\ell + \int_{L^-} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(u_t + au_x)d\ell + \\ &\quad - \int_{x-at}^{x+at} u_t(s,0)ds.\end{aligned}$$

Lại có

- đạo hàm dọc theo đường L_+ là $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}(\partial_t - a\partial_x)$,
- đạo hàm dọc theo đường L_- là $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}(\partial_t + a\partial_x)$

nên

- $\int_{L^+} \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}(u_t - au_x)d\ell = a(u(x,t) - u(x+at,0))$,
- $\int_{L^-} \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}(u_t + au_x)d\ell = a(u(x,t) - u(x-at,0))$.

Tóm lại ta thu được

$$\begin{aligned}u(x,t) =& \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{C_1(x,t)} f(y,s)dyds. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Việc giải được bài toán (1.1)-(1.2) được thể hiện qua định lý sau:

Định lý 1.1. *Cho số nguyên $m \geq 2$, các hàm $\varphi \in C^m(\mathbb{R}), \psi \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ và $f \in C^{m-1}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Khi đó bài toán (1.1)-(1.2) có duy nhất một nghiệm được cho bởi (1.3). Hơn nữa nghiệm này $u \in C^m(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ và thỏa mãn điều kiện ban đầu theo cách*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0) \text{ khi } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Việc chứng minh kết quả trên đơn thuần chỉ là việc tính đạo hàm. Chi tiết chứng minh xem như bài tập.
Trước khi chuyển sang mục khác, (1.3) cho ta thấy nghiệm ổn định trong khoảng thời gian hữu hạn.

1.1.2 Bài toán biên hỗn hợp

Dưới đây ta xét các bài toán trên miền không gian hoặc là nửa trục, hoặc là một đoạn hữu hạn. Để đơn giản ta chỉ quan tâm đến phương trình truyền sóng thuần nhất, không có ngoại lực.
Ta bắt đầu với việc xem xét bài toán trên nửa trục

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \text{ trong } (0,\infty) \times (0,\infty), \tag{1.4}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi, u_t(\cdot,0) = \psi, \text{ trên } [0,\infty), \tag{1.5}$$

$$u(0,t) = \alpha(t), t \geq 0. \tag{1.6}$$

Để bài toán (1.4)-(1.6) có nghiệm trong $C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ ta cần điều kiện tương thích tại gốc tọa độ:

- tính liên tục điều kiện biên - điều kiện ban đầu: $\alpha(0) = \varphi(0)$,
- tính liên tục của đạo hàm theo t giữa điều kiện biên-điều kiện ban đầu: $\alpha'(0) = \psi(0)$,
- thỏa mãn phương trình: $\alpha"(0) = a^2\varphi"(0)$.

Ta sẽ chỉ ra rằng với điều kiện tương thích trên, bài toán có duy nhất nghiệm trong (1.4)-(1.6).
Trước hết ta quan tâm đến trường hợp $\alpha \equiv 0$. Khi đó điều kiện tương thích trở thành

$$\varphi(0) = 0,\ \psi(0) = 0,\ \varphi"(0) = 0.$$

Thác triển lẻ các điều kiện ban đầu lên toàn trục

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{khi } x \geq 0, \\ -\varphi(-x) & \text{khi } x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{khi } x \geq 0, \\ -\psi(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Với điều kiện tương thích ta có $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}), \tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. Khi đó nghiệm D'Alembert của bài toán giá trị ban đầu trên toàn trục

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} =& a^2 \tilde{u}_{xx} \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u}(\cdot, 0) = \tilde{\varphi}, \tilde{u}_t(\cdot, 0) =& \tilde{\psi} \text{ trên } \mathbb{R} \end{aligned}$$

là C^2-nghiệm cổ điển. Ngoài ra, do tính lẻ của điều kiện ban đầu dẫn đến tính lẻ của nghiệm D'Alembert. Do đó

$$\tilde{u}(0, t) = 0, t \geq 0.$$

Khi đó $u(x, t) = \tilde{u}(x, t), x \geq 0$ chính là C^2-nghiệm cổ điển của bài toán (1.4)-(1.6). Cụ thể nghiệm này được viết

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy & \text{khi } x \geq at \geq 0, \\ \dfrac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(y) dy & \text{khi } 0 \leq x \leq at. \end{cases} \tag{1.7}$$

Chuyển sang trường hợp tổng quát, lấy hàm khử

$$v(x, t) = \alpha(t - x/a)$$

thỏa mãn phương trình và điều kiện biên

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \text{ trong } (0, \infty) \times (0, \infty), \ v(0, t) = \alpha(t) \text{ khi } t \geq 0.$$

Đặt $\bar{u} = u - v$ có $\bar{u}$ thỏa mãn bài toán

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} =& a^2 \bar{u}_{xx} \text{ trong } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \bar{u}(\cdot, 0) = \bar{\varphi}, \bar{u}_t(\cdot, 0) =& \bar{\psi} \text{ trên } [0, \infty), \\ \bar{u}(0, t) =& 0, \ t \geq 0, \end{aligned}$$

với $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \alpha(-x/a), \bar{\psi}(x) = \psi(x) - \alpha'(-x/a)$. Từ điều kiện tương thích cho bài toán (1.4)-(1.6) dẫn đến

$$\bar{\varphi}(0) = 0,\ \bar{\psi}(0) = 0, \bar{\varphi}"(0) = 0.$$

Như vậy ta đã chuyển bài toán ban đầu về bài toán với điều kiện biên thuần nhất và điều kiện tương thích được thỏa mãn. Ta đã giải được bài toán (1.4)-(1.6) khi điều kiện tương thích thỏa mãn. Ta viết kết quả này như sau.

Định lý 1.2. *Cho $\varphi \in C^2[0,\infty), \psi \in C^1[0,\infty), \alpha \in C^2[0,\infty)$ thỏa mãn điều kiện tương thích*

$$\alpha(0) = \varphi(0),\ \alpha'(0) = \psi(0),\ \alpha''(0) = a^2\varphi''(0).$$

Khi đó bài toán (1.4)-(1.6) *có duy nhất nghiệm trong $C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$.*

Trước khi chuyển sang bài toán trong một đoạn, nếu thay điều kiện biên Dirichlet (1.6) bởi điều kiện biên Neumann

$$u_x(0,t) = \alpha(t), t \geq 0,$$

thì điều kiện tương thích là gì? Lúc đó bài toán được giải như nào?
Ta tiếp tục xem xét bài toán biên hỗn hợp trong một đoạn $[0, L]$, $L > 0$, sau

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ trong } (0,L) \times (0,\infty), \tag{1.8}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi, u_t(\cdot,0) = \psi \text{ trên } [0,L], \tag{1.9}$$

$$u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t),\ t \geq 0. \tag{1.10}$$

Điều kiện tương thích của bài toán (1.8)-(1.10)

- tại đầu mút $x = 0$ có

$$\alpha(0) = \varphi(0),\ \alpha'(0) = \psi(0),\ \alpha''(0) = a^2\varphi''(0), \tag{1.11}$$

- tại đầu mút $x = L$ có

$$\beta(0) = \varphi(L),\ \beta'(0) = \psi(L),\ \beta''(0) = a^2\varphi''(L). \tag{1.12}$$

Cũng giống bài toán trên nửa trục, ta xét bài toán khi điều kiện biên thuần nhất $\alpha = \beta = 0$. Khi đó điều kiện tương thích trở thành

$$\begin{aligned}\varphi(0) =&0,\ \psi(0) = 0,\ \varphi''(0) = 0,\\ \varphi(L) =&0,\ \psi(L) = 0,\ \psi''(L) = 0.\end{aligned}$$

Với điều kiện tương thích này, các thác triển $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ lẻ, tuần hoàn chu kỳ $2L$ của các điều kiện ban đầu φ, ψ là các hàm thuộc lớp C^2 và C^1 trên $\mathbb{R}$. Khi đó C^2-nghiệm $\tilde{u}$ của bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt} - a^2\tilde{u}_{xx} =&0 \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty),\\ \tilde{u}(\cdot, 0) = \tilde{\varphi},\ \tilde{u}_t(\cdot, 0) =&\tilde{\psi} \text{ trên } \mathbb{R},\end{aligned}$$

là hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ $2L$ trên toàn $\mathbb{R}$. Khi đó, từ tính lẻ và tuần hoàn chu kỳ $2L$ ta có

$$\tilde{u}(0, t) = 0 \text{ và } \tilde{u}(L, t) = 0.$$

Việc giải thích tại sao như vậy xem như bài tập. Khi đó nghiệm u của bài toán (1.8)-(1.10) chính là hạn chế của $\tilde{u}$ trong $[0, L] \times [0, \infty)$.
Với trường hợp tổng quát ta có thể nghĩ đến việc khử điều kiện biên bằng hàm có dạng

$$v(x, t) = h(x - at) + g(x + at)$$

với $h, g \in C^2(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\begin{cases} h(-at) + g(at) = & \alpha(t) \text{ khi } t \geq 0,\\ h(L - at) - g(L + at) = & \beta(t) \text{ khi } t \geq 0.\end{cases}$$

Ngoài ra ta có thể dùng đến đẳng thức hình bình hành bằng việc chia $[0, L] \times (0, \infty)$ bởi các đường đặc trưng $x \pm at = kL, k \in \mathbb{Z}$. Chi tiết phần này xem như bài tập. Khi đó ta thu được kết quả sau.

Định lý 1.3. *Cho $\varphi \in C^2[0, L], \psi \in C^1[0, L], \alpha, \beta \in C^2[0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện tương thích* (1.11)-(1.12)*. Khi đó bài toán* (1.8)-(1.10) *có nghiệm $u \in C^2([0, L]\times[0, \infty))$.*

Câu hỏi tương tự như trong bài toán trên nửa trục: việc giải bài toán (1.8)-(1.10) như nào khi thay điều kiện biên Dirichlet (1.10) bởi điều kiện biên Neumann

$$u_x(0,\cdot) = \alpha,\ u_x(L,\cdot) = \beta.$$

Các phân tích ở trên cho ta thấy vai trò quan trọng của các đường đặc trưng:

- Nó xác định số điều kiện biên đặt lên bài toán: chính là "số" đường đặc trưng đi vào miền xác định.
- Nó xác định miền phụ thuộc và miền ảnh hưởng. Cụ thể hơn giá trị ban đầu sẽ lan truyền theo các đường đặc trưng đến nghiệm.
- Nó xác định miền để đánh giá năng lượng. Điều này ta từng thấy ở phương trình cấp 1. Ta sẽ thấy lại điều này ở mục "Đánh giá năng lượng" của phương trình hyperbolic.

1.2 Phương trình truyền sóng số chiều cao

Trong mục này ta quan tâm đến bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng trong không gian số chiều cao. Công việc chủ yếu sẽ là đưa ra công thức nghiệm và một số tính chất của nghiệm.

1.2.1 Phương pháp trung bình cầu

Cho $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n), \psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ và $a > 0$. Xét bài toán

$$u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.13}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi, u_t(\cdot,0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

Với mỗi hàm $\omega \in C(\mathbb{R}^n), r > 0$, có trung bình cầu

$$W(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \omega(y) dS_y,$$

với $\omega_n r^{n-1} = |\partial B_r|$ diện tích mặt cầu bán kính r trong $\mathbb{R}^n$. Hàm ω được xác định nhờ trung bình cầu W của nó bởi

$$\omega(x) = \lim_{r\to 0^+} W(x,r), x \in \mathbb{R}^n.$$

Tiếp theo, với u là C^2-nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14), với $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, ta xét các trung bình cầu

$$\begin{aligned}
U(x,r,t) =& \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t) dS_y, \\
\Phi(x,r,t) =& \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \varphi(y,t) dS_y, \\
\Psi(x,r,t) =& \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \psi(y,t) dS_y.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chỉ ra rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ trung bình cầu $U(x,r,t)$ thỏa mãn phương trình Euler-Poisson-Darboux

$$U_{tt} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right), \ r > 0, t > 0 \tag{1.15}$$

với các điều kiện ban đầu

$$U(x,r,0) = \Phi(x,r), U_t(x,r,0) = \Psi(x,r), x > 0.$$

Thật vậy, trước hết ta viết lại trung bình cầu

$$U(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1} u(x + r\omega, t) dS_\omega.$$

Đạo hàm theo r, rồi dùng công thức Green ta có

$$\begin{aligned}
U_r =& \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1} \omega \cdot \nabla_x u(x + r\omega, t) dS_\omega = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \partial_\nu u(y,t) dSy \\
=& \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y,t) dy.
\end{aligned}$$

Lại do u là nghiệm của (1.13) nên

$$\begin{aligned}
a^2 (r^{n-1} U_r)_r =& \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y,t) dS_y \\
=& \frac{1}{\omega_n} \partial_{tt} \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y,t) dS_y \right) = r^{n-1} U_{tt}.
\end{aligned}$$

Như vậy $U(x,r,t)$ thỏa mãn phương trình Euler-Poisson-Darboux. Không khó để thấy nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu. Đến đây ta giải bài toán (1.13)-(1.14) trong các trường hợp cụ thể.

1.2.2 Số chiều 3

Trong trường hợp không gian có số chiều $n = 3$, ta có thể viết lại phương trình (1.15) dưới dạng

$$(rU)_{tt} = a^2(rU)_{rr}, r > 0, t > 0.$$

Khi đó nếu đặt

$$\tilde{U}(x, r, t) = rU(x, r, t)$$

và

$$\tilde{\Phi}(x, r, t) = r\Phi(x, r, t),\ \tilde{\Psi}(x, r, t) = r\Psi(x, r, t)$$

thì $\tilde{U}$ thỏa mãn bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng trong nửa trục

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} =& a^2\tilde{U}_{rr},\ \text{khi } r > 0, t > 0, \\ \tilde{U}(x, r, 0) = \tilde{\Phi}(x, r), \tilde{U}_t(x, r, 0) =& \tilde{\Psi}(x, r),\ \text{khi } r > 0, \\ \tilde{U}(x, 0, t) =& = 0,\ \text{khi } t > 0. \end{aligned}$$

Khi đó, với $at \geq r > 0$, từ (1.7) có

$$\tilde{U}(x, r, t) = \frac{\tilde{\Phi}(x, at + r) - \tilde{\Phi}(at - r)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r} \tilde{\Psi}(x, s)ds,$$

hay

$$\begin{aligned} U(x, r, t) =& \frac{(at + r)\Phi(x, at + r) - (at - r)\Phi(x, at - r)}{2r} + \\ &+ \frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{at+r} s\Psi(x, s)ds. \end{aligned}$$

Cho $r \to 0^+$ ta có công thức cho bài toán (1.13)-(1.14)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \partial_t(t\Phi(at)) + t\Psi(at) \\ &= \partial_t\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B_{at}(x)} \varphi(y)dS_y\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B_{at}(x)} \psi(y)dS_y, \end{aligned} \tag{1.16}$$

với $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. Chú ý rằng, khi sử dụng (1.7) ta chưa kiểm tra điều kiện tương thích

$$\tilde{\Phi}(0) = 0, \tilde{\Psi}(0) = 0, \tilde{\Phi}''(0) = 0.$$

Dưới đây ta chỉ ra (1.16) thực sự là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14).

Định lý 1.4. *Cho số nguyên* $k \geq 2, \varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R}^3), \psi \in C^k(\mathbb{R}^3)$. *Khi đó* u *xác định bởi* (1.16) *thuộc* $C^k(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Có thể thấy nghiệm u có thể thác triển thành hàm $C^k(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý khi $\varphi = 0$. Khi $\psi = 0$ ta chứng minh tương tự. Từ (1.16) ta có

$$u(x,t) = t\Psi(x,at)$$

trong đó

$$\Psi(x,at) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \psi(x+at\omega)dS_\omega.$$

Không khó để thấy $u(\cdot,0) = 0$. Ngoài ra, do $\psi \in C^k(\mathbb{R}^3)$ nên $\nabla_x^i u$, $i = 0,1,\ldots,k$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$. Đặc biệt

$$\Delta u(x,t) = t\Delta_x\Psi(x,at) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \Delta_x\psi(x+at\omega)dS_\omega.$$

Đạo hàm theo t và dùng công thức Green ta có

$$\begin{aligned}\Psi_t(x,t) =& \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_\nu\psi(x+t\omega)dS_\omega\\ =& \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \partial_\nu\psi(y)dS_y = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{B_t(x)} \Delta\psi(y)dy.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\Psi_{tt}(x,t) =& -\frac{1}{2\pi t^3}\int_{B_t(x)} \Delta\psi(y)dy + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \Delta\psi(y)dS_y\\ =& -\frac{2}{t}\Psi_t(t) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1} \Delta_x\psi(x+t\omega)dS_y.\end{aligned}$$

Như vậy

- $u_t(x,t) = \Psi(x,at) + at\Psi_t(x,at)$ nên $u_t(\cdot,0) = \psi$;
- $u_{tt}(x,t) = 2a\Psi_t(x,at) + a^2t\Psi_{tt}(x,at) = a^2\Delta u$;
- $\nabla^i u_t, i = 0, 1 \ldots, k-1$ xác định và liên tục trong $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

Ta hoàn thành chứng minh. □

Ta có thể viết lại nghiệm

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B_{at}(x)} (\varphi(y) + \nabla\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y))dS_y \tag{1.17}$$

khi $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$. Để ý rằng giá trị của nghiệm u tại (x,t) chỉ phụ thuộc vào giá trị của các điều kiện ban đầu trên mặt cầu $\partial B_{at}(x)$. Qua đây ta thấy ý nghĩa của hằng số a : tốc độ lan truyền sóng.

1.2.3 Số chiều 2

Với bài toán giá trị ban đầu (1.13)-(1.14) trong trường hợp không gian 2−chiều, ta dùng phương pháp hạ thấp số chiều. Nôm na, hàm xác định trong mặt phẳng có thể hiểu là hàm xác định trong không gian và nó là hằng theo chiều thứ ba. Cụ thể như sau, với $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ là các hàm hai biến $x = (x_1, x_2)$, có thể coi chúng như hàm ba biến $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bằng cách

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x), \bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x).$$

Khi đó các hàm $\bar{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}^3), \bar{\psi} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ là các hàm ba biến, không phụ thuộc biến thứ ba. Đặc biệt $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty))$ là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14) khi và chỉ khi hàm

$$\bar{u}(\bar{x},t) = u(x,t)$$

là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} - \Delta_{\bar{x}} u =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \bar{u}(\cdot,0) = \bar{\varphi}, \bar{u}_t(\cdot,0) =& \bar{\psi} \text{ trên } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Từ (1.16) ta có nghiệm của bài toán trên

$$\bar{u}(\bar{x},t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial B_{at}(\bar{x})} \bar{\varphi}(\bar{y}) dS_{\bar{y}} \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial B_{at}(\bar{x})} \bar{\psi}(\bar{y}) dS_{\bar{y}}.$$

Do các hàm $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ không phụ thuộc vào biến thứ ba nên ta chỉ cần tính các tích phân trên mặt cầu $\partial B_{at}(\bar{x})$ ở trên bởi các tích phân trên nửa mặt cầu trên

$$y_3 = \sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}, y \in B_{at}(x).$$

Có vi phân mặt

$$dS_{\bar{y}} = \frac{atdy}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}}$$

nên công thức nghiệm trong trường hợp 2−chiều

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \partial_t \left(\frac{1}{2a\pi} \int_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2a\pi} \int_{B_{at}(x)} \frac{\psi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Từ Định lý 1.4 ta có kết quả cho trường hợp không gian 2−chiều.

Định lý 1.5. *Cho số nguyên $k \geq 2, \varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R}^2), \psi \in C^k(\mathbb{R}^2)$. Khi đó u xác định bởi (1.17) thuộc $C^k(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Nghiệm trên có thể thác triển thành hàm C^k trên $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$. Ta viết lại nghiệm (1.17) dưới dạng

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi at} \int_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y) + \nabla\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}} dy, \tag{1.19}$$

khi $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$. Để ý rằng giá trị của nghiệm u tại điểm (x,t) chỉ phụ thuộc vào giá trị ban đầu φ, ψ trong hình tròn $B_{at}(x)$. Ta lại thấy ý nghĩa của a : tốc độ lan truyền.

1.2.4 Tính chất của nghiệm

Trong các mục trước ta đưa ra công thức C^2-nghiệm của bài toán giá trị ban đầu của phương trình truyền sóng trong không gian $n-$chiều, với $n = 1, 2, 3$. Nếu ký hiệu u_n là nghiệm trong không gian $n-$chiều thì với mỗi $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ta có

- công thức nghiệm D'Almebert

$$u_1(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy;$$

- công thức nghiệm Poisson

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi^2 at}\int_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y)+\nabla\varphi(y)\cdot(x-y)+t\psi(y)}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}dy;$$

- công thức nghiệm Kirchhoff

$$u_3(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2t^2}\int_{\partial B_{at}(x)} (\varphi(y)+\nabla\varphi(y)\cdot(x-y)+t\psi(y))dS_y.$$

Dưới đây ta sẽ đưa ra một số tính chất của nghiệm qua việc quan sát các công thức này.
Về miền phụ thuộc, miền xác định giá trị của nghiệm u tại điểm $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ với mỗi trường hợp được thể hiện như sau:

- Trường hợp $n = 1$, miền phụ thuộc của (x, t) là đoạn thẳng $[x - at, x + at]$. Cụ thể hơn, với trạng thái ban đầu ta chỉ cần hai đầu mút $(x - at, 0), (x + at, 0)$.
- Trường hợp $n = 2$, miền phụ thuộc của (x, t) là hình cầu $B_{at}(x)$.
- Trường hợp $n = 3$, miền phụ thuộc của (x, t) là mặt cầu $\partial B_{at}(x)$.

Tính chất này được hiểu là tính chất địa phương của nghiệm của phương trình truyền sóng, nghĩa là nếu giá trị ban đầu chỉ thay đổi ở ngoài miền phụ thuộc thì giá trị của nghiệm không thay đổi. Điểm này hoàn toàn khác so với phương trình truyền nhiệt.
Ta nhìn ngược lại quá trình trên, giá trị ban đầu tại điểm $(x_0, 0)$ sẽ ảnh hưởng đến giá trị của u

- trường hợp $n = 1$ hay $n = 2$, trong nón $a|x - x_0| \leq t$,
- trường hợp $n = 3$, trên mặt nón $a|x - x_0| = t$.

Cụ thể hơn, giả sử giá của các điều kiện ban đầu φ, ψ nằm trong các hình cầu $B_r(x_0)$. Sau một thời gian t ta có

- trường hợp $n = 1$ hay $n = 2$ giá của $u(\cdot, t)$ nằm trong hình $B_{r+at}(x_0)$,
- trường hợp $n = 3$ giá của $u(\cdot, t)$ nằm trong hình $B_{r+at}(x_0) \setminus B_{r-at}(x_0)$.

Tính chất đầu tiên ta thấy được từ đây được hiểu là tính chất lan truyền với tốc độ hữu hạn, cụ thể tốc độ lan truyền a, nghĩa là những gì xảy ra tại thời điểm ban đầu lan ra với tốc độ a.
Điều tiếp theo ta có thể thấy có sự so sánh giữa sóng trong mặt phẳng và sóng trong không gian:

- sóng trong mặt phẳng (chẳng hạn sóng trên mặt hồ khi thả một hòn đá xuống), sự ảnh hưởng của điều kiện ban đầu tại một điểm khi đã ảnh hưởng sẽ là ảnh hưởng mãi mãi,
- sóng trong không gian (chẳng hạn sóng âm thanh), sự ảnh hưởng của điều kiện ban đầu tại một điểm chỉ trong một khoảng thời gian nhất định, còn gọi là dư âm.

Hiện tượng dư âm của sóng trong không gian còn gọi là nguyên lý Huygen. Các sóng trong không gian số chiều lẻ, trừ trường hợp $n = 1$, cũng chia sẻ nguyên lý Huygen.
Tiếp theo ta bàn về tính trơn của nghiệm phụ thuộc vào tính trơn của điều kiện ban đầu như nào?

- Trường hợp $n = 1$, độ trơn của u chính xác bằng độ trơn của trạng thái ban đầu $u(\cdot, 0)$, và tốt hơn 1 so với độ trơn của vận tốc ban đầu $u_t(\cdot, 0)$. Cụ thể, nếu tại thời điểm ban đầu $t = 0$ có $u \in C^m, u_t \in C^{m-1}$ thì nghiệm $u \in C^m$ tại thời điểm sau đó.
- Trường hợp $n = 3$, độ trơn của u kém hơn so với độ trơn của trạng thái ban đầu , và bằng độ trơn của vận tốc ban đầu. So với so chiều $n = 1$, nó thực sự bị mất đi một bậc khả vi.

Ví dụ sau cho ta thấy thực sự bị mất một bậc khả vi.

Ví dụ 1.1. Xét bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng trong $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = 0,\ u_t(\cdot, 0) =& \psi \text{ trên } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Nghiệm được cho bởi

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_t(x)} \psi(y) dS_y,\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Giả sử ψ chỉ phụ thuộc vào $|x|$, nghĩa là $\psi(x) = h(|x|), h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, thì

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_t} h(t) dy = th(t).$$

Với số nguyên $k \geq 3$, nếu ψ không thuộc lớp C^k tại $|x| = 1$, nghĩa là h không thuộc lớp C^k tại $t = 1$. Khi đó nghiệm u sẽ không thuộc lớp C^k tại $(0, 1)$. Ý nghĩa vật lý của hiện tượng này:

Khi có kỳ dị tại thời điểm ban đầu trên $|x| = 1$ thì kỳ dị đó sẽ lan dọc theo nón đặc trưng và tập trung tại đỉnh của nón.

Chú ý rằng $(0, 1)$ đỉnh của nón $\{(x,t) :\ 0 < t < 1, |x| < 1-t\}$ có đáy $\{(x, 0) :\ |x| = 1\}$.

1.2.5 Số chiều lẻ

Tiếp theo ta đưa ra công thức nghiệm cho bài toán giá trị ban đầu (1.13)-(1.14) trong không gian số chiều lẻ bằng cách sử dụng trung bình cầu $U(x, r, t)$. Nhắc lại phương trình Euler-Poisson-Darboux

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r) \text{ khi } r > 0, t > 0.$$

Biến đổi một chút phương trình trên

$$(rU)_{tt} = a^2((rU)_{rr} + (n-3)U_r).$$

Ta dùng phương trình trên để giải bài toán giá trị ban đầu khi $n = 3$. Tuy nhiên $n = 5$ ta cần đến dạng khác của phương trình trên

$$(r^2 U_r + 3rU)_{tt} = a^2((r^2 U_r + 3rU)_{rr} + (n-5) r U_{rr}).$$

Để làm cho trường hợp tổng quát ta để ý

$$r^2U + 3rU = \frac{\partial_r}{r}(r^3U).$$

Đây là điểm gợi ý: phương trình Euler-Poisson-Darboux chuyển về dạng phương trình truyền sóng 1−chiều trong góc dương $r > 0, t > 0$ cho hàm dạng

$$\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}}(r^{n-2}U).$$

Ta cần đến bổ đề tính toán sau:

Bổ đề 1.6. *Cho $m \in \mathbb{N}, v = v(r)$ là hàm thuộc $C^{m+1}(0,\infty)$. Khi đó với bất kỳ $r > 0$ ta có*

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m-1}(r^{2m-1}v(r)) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m}\left(r^{2m}\frac{dv}{dr}(r)\right), \tag{1.20}$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m-1}(r^{2m-1}v(r)) = \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i}r^{i+1}\frac{d^iv}{dr^i}(r), \tag{1.21}$$

trong đó $c_{m,i}$ là các hằng số không phụ thuộc v, với $i = 0, 1, \ldots, m-1$, và

$$c_{m,0} = 1 \cdot 3 \cdots (2m-1).$$

Chứng minh. Ta chứng bổ đề bằng quy nạp. Việc kiểm tra bổ đề khi $m = 1$ khá hiển nhiên. Giả sử bổ đề đúng với m. Ta chứng minh bổ đề cho $m+1$. Ta có

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^{2m+1}v(r)) = (2m+1)r^{2m-1}v(r) + r^{2m}v'(r), \tag{1.22}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^{2m+2}v'(r)) = (2m+2)r^{2m}v'(r) + r^{2m+1}v''(r). \tag{1.23}$$

Sử dụng (1.22) và giả thiết quy nạp cho (1.21)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m}(r^{2m+1}v(r)) &= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m-1}((2m+1)r^{2m-1}v(r) + r^{2m}v'(r)) \\ &= (2m+1)\sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i}r^{i+1}\frac{d^iv}{dr^i}(r) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i}r^{i+1}\frac{d^i}{dr^i}(rv'(r))\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} c_{m+1,0} =&(2m+1)c_{m,0}, c_{m+1,m} = c_{m,m-1}, \\ c_{m+1,i} =&(2m+1+i)c_{m,i} + c_{m,i-1}, i = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh được (1.21).
Lại sử dụng (1.22) giả thiết quy nạp cho (1.20)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m (r^{2m+1}v(r)) = \\ &= \left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{m-1} ((2m+1)r^{2m-1}v(r) + r^{2m}v'(r)) \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^m \left((2m+1)r^{2m}v'(r) + r^{2m}(rv'(r))'\right). \end{aligned}$$

Chú ý

$$(2m+1)r^{2m}v'(r) + r^{2m}(rv'(r))' = (2m+2)r^{2m}v'(r) + r^{2m}v''(r)$$

nên dùng (1.23) ta có (1.21) cho $m+1$. Ta hoàn thành chứng minh. □

Quay trở lại việc giải bài toán (1.13)-(1.14) trong không gian có số chiều lẻ $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. Giả sử $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^n), \psi \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ và $u \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14). Khi đó nếu đặt

$$\tilde{U}(x,r,t) = \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1} (r^{m-1}U(x,r,t))$$

và

$$\tilde{\Phi}(x,r,t) = \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1} (r^{m-1}\Phi(x,r,t)),$$

$$\tilde{\Psi}(x,r,t) = \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1} (r^{m-1}\Psi(x,r,t))$$

thì $\tilde{U}$ thỏa mãn bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng trong nửa trục

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} =& a^2\tilde{U}_{rr}, \text{ khi } r > 0, t > 0, \\ \tilde{U}(x,r,0) = \tilde{\Phi}(x,r), \tilde{U}_t(x,r,0) =& \tilde{\Psi}(x,r), \text{ khi } r > 0, \\ \tilde{U}(x,0,t) =& = 0, \text{ khi } t > 0. \end{aligned}$$

Thật vậy, điều kiện ban đầu ở trên được suy ra dễ dàng từ tính chất của các trung bình cầu U, Φ, Ψ. Còn điều kiện biên được dẫn ra từ (1.21) trong Bổ đề 1.6. Để chỉ ra phương trình, trước hết tính toán

$$\frac{\partial_r}{r}(r^{2m}U_r) = r^{2m-1}U_{rr} + 2mr^{2m-2}U_r.$$

Chú ý $n = 2m + 1$, và dùng phương trình Euler-Poisson-Darboux ta thu được

$$a^2\frac{\partial_r}{r}(r^{2m}U_r) = r^{2m-1}U_{tt}.$$

Tiếp tục sử dụng (1.20) trong Bổ đề 1.6 ta được

$$\begin{aligned} a^2\tilde{U}_{rr} =& a^2\partial_r^2\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1}(r^{2m-1}U) = a^2\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m}(r^{2m}U_r) \\ =& a^2\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1}(r^{2m-1}U_{tt}) = \tilde{U}_{tt}. \end{aligned}$$

Như vậy $\tilde{U}(x, r, t)$ thỏa mãn bài toán biên hỗn hợp trong góc dương. Khi đó, với $at \geq r > 0$, từ (1.7) có

$$\tilde{U}(x, r, t) = \frac{\tilde{\Phi}(x, at + r) - \tilde{\Phi}(at - r)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r}\tilde{\Psi}(x, s)ds.$$

Sử dụng (1.21) trong Bổ đề 1.6 có

$$\lim_{r\to 0^+} U(x, r, t) = \lim_{r\to 0^+}\frac{\tilde{U}(x, r, t)}{c_{m,0}r}$$

hay công thức nghiệm cho bài toán (1.13)-(1.14)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{c_{m,0}}\lim_{r\to 0^+}\left(\frac{\tilde{\Phi}(x, at + r) - \tilde{\Phi}(at - r)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\tilde{\Psi}(x, s)ds\right) \\ &= \frac{\partial_t\left[\tilde{\Phi}(x, at)\right] + \tilde{\Psi}(x, at)}{c_{m,0}a}. \end{aligned}$$

Với chú ý

$$\tilde{\Phi}(x, ar) = a\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{m-1}(r^{2m-1}\Phi(x, ar))$$

nên ta viết lại nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n}\left[\partial_t\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-1}t}\int_{\partial B_{at}(x)}\varphi dS\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-1}t}\int_{\partial B_{at}(x)}\psi dS\right)\right]. \tag{1.24}$$

với $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), n$ lẻ, ω_n là diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ và

$$c_n = 1 \cdot 3 \cdots (n-2).$$

Chú ý rằng, khi sử dụng (1.7) ta chưa kiểm tra điều kiện tương thích

$$\tilde{\Phi}(0) = 0, \tilde{\Psi}(0) = 0, \tilde{\Phi}''(0) = 0.$$

Dưới đây ta chỉ ra (1.24) thực sự là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14).

Định lý 1.7. *Cho số nguyên lẻ $n \geq 3$ và số nguyên $k \geq 2$. Giả sử $\varphi \in C^{\frac{n-1}{2}+k}(\mathbb{R}^n), \psi \in C^{\frac{n-3}{2}+k}(\mathbb{R}^n)$ và u xác định bởi (1.24). Khi đó $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Nghiệm trên có thể thác triển thành hàm C^k trên $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

Chứng minh. Ta làm gần giống như trường hợp $n = 3$. Ta chứng minh định lý khi $\varphi = 0$. Khi $\psi = 0$ ta chứng minh tương tự.
Từ (1.24) ta có

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\Psi(x,at))$$

trong đó

$$\Psi(x,at) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\omega|=1}\psi(x+at\omega)dS_\omega.$$

Từ (1.21) trong Bổ đề 1.6 có

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n}\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} c_{\frac{n-1}{2},i} t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)] \tag{1.25}$$

với $c_{\frac{n-1}{2},0} = c_n$. Từ đó không khó để thấy $u(\cdot,0) = 0$ và

$$u_t(x,0) = \lim_{t\to 0^+}\Psi(x,at) = \psi(x).$$

Ngoài ra, do $\psi \in C^{\frac{n-3}{2}+k}(\mathbb{R}^n)$ nên $\nabla_x^i u$, $i = 0,1,\ldots,k$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Đặc biệt

$$\begin{aligned}\Delta u(x,t) =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\Delta\Psi(x,at))\\ =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{t^{n-2}}{\omega_n}\int_{|\omega|=1}\Delta\psi(x+at\omega)dS_\omega\right)\\ =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-1}t}\int_{\partial B_{at}(x)}\Delta\psi(y)dS_y\right)\end{aligned} \tag{1.26}$$

Đạo hàm theo t và dùng công thức Green ta có

$$\begin{aligned}\Psi_t(x,t) =& \frac{1}{\omega_n}\int_{|\omega|=1}\partial_\nu\psi(x+t\omega)dS_\omega\\ =& \frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\int_{\partial B_t(x)}\partial_\nu\psi(y)dS_y = \frac{1}{\omega_n t^{n-1}}\int_{B_t(x)}\Delta\psi(y)dy.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Khi đó $\nabla^i u_t, i = 0,1\ldots,k-1$ xác định và liên tục trong $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.
Sử dụng (1.20) trong Bổ đề 1.6 và (1.27) có

$$\begin{aligned}u_{tt}(x,t) =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}(t^{n-1}\partial_t[\Psi(x,at)])\\ =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-2}}\int_{B_{at}(x)}\Delta\psi(y)dy\right)\\ =& \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-3}t}\int_{\partial B_{at}(x)}\Delta\psi(y)dy\right).\end{aligned} \tag{1.28}$$

Như vậy, từ (1.26) và (1.28) có

$$u_{tt}(x,t) = a^2\Delta u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Ta hoàn thành chứng minh. □

1.2.6 Số chiều chẵn

Trường hợp không gian số chiều chẵn $n \geq 2$, ta làm tương tự như trường hợp mặt phẳng. Ta cũng dùng phương pháp hạ thấp số chiều. Cụ thể như sau, với $\varphi \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n), \psi \in C^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ là các hàm n biến $x = (x_1, \ldots, x_n)$, có thể coi chúng như hàm $n+1$ biến $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ bằng cách

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x), \bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x).$$

Khi đó các hàm $\bar{\varphi} \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^{n+1}), \bar{\psi} \in C^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^{n+1})$ là các hàm $n+1$ biến, không phụ thuộc biến thứ $n+1$. Đặc biệt $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14) khi và chỉ khi hàm

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = u(x, t)$$

là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} - a^2 \Delta_{\bar{x}} u =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^{n+1} \times (0, \infty), \\ \bar{u}(\cdot, 0) = \bar{\varphi}, \bar{u}_t(\cdot, 0) =& \bar{\psi} \text{ trên } \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Từ (1.24) ta có nghiệm của bài toán trên

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{1}{c_{n+1}} \Bigg[\partial_t \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{1}{\omega_{n+1} a^n t} \int_{\partial B_{at}(\bar{x})} \bar{\varphi}(\bar{y}) dS_{\bar{y}} \right) + \\ + \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{1}{\omega_{n+1} a^n t} \int_{\partial B_{at}(\bar{x})} \bar{\psi}(\bar{y}) dS_{\bar{y}} \right) \Bigg]. \end{aligned}$$

Do các hàm $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ không phụ thuộc vào biến thứ $n+1$ nên ta chỉ cần tính các tích phân trên mặt cầu $\partial B_{at}(\bar{x})$ ở trên bởi các tích phân trên nửa mặt cầu trên

$$y_{n+1} = \sqrt{a^2 t^2 - |y - x|^2}, y \in B_{at}(x).$$

Có vi phân mặt

$$dS_{\bar{y}} = \frac{atdy}{\sqrt{a^2 t^2 - |y - x|^2}}$$

nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{n+1} a^n t} \int_{\partial B_{at}(\bar{x})} \bar{\varphi}(\bar{y}) dS_{\bar{y}} =& \frac{2}{\omega_{n+1} a^{n-1}} \int_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |y - x|^2}} \\ =& \frac{2\omega_n}{n\omega_{n+1}} \cdot \frac{n}{\omega_n a^{n-1}} \int_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |y - x|^2}}. \end{aligned}$$

Do diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ là $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ và $n = 2m-2$ chẵn nên

$$\frac{nc_{n+1}\omega_{n+1}}{2\omega_n} = 2\cdot 4\cdots(2m-2) = c_n.$$

Khi đó nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14) trường hợp $n = 2m-2$ chẵn

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n}\left[\partial_t\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n}{\omega_n a^{n-1}}\int_{B_{at}(x)}\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n}{\omega_n a^{n-1}}\int_{B_{at}(x)}\frac{\psi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2-|y-x|^2}}\right)\right]. \tag{1.29}$$

Từ Định lý 1.7 ta có kết quả cho trường hợp không gian $n = 2m-2$ chiều.

Định lý 1.8. *Cho số nguyên chẵn $n \geq 2$ và số nguyên $k \geq 2$. Giả sử $\varphi \in C^{\frac{n}{2}+k}(\mathbb{R}^n), \psi \in C^{\frac{n-2}{2}+k}(\mathbb{R}^n)$ và u xác định bởi (1.29). Khi đó $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Nghiệm trên có thể thác triển thành hàm C^k trên $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

1.2.7 Tính chất toàn cục

Trong mục này ta bàn về tính chất toàn cục của các nghiệm của bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng. Đầu tiên ta có tính bị chặn toàn cục.

Định lý 1.9. *Cho $n \geq 2$, ψ là hàm trơn trong $\mathbb{R}^n$, và u là nghiệm của bài toán*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$
$$u(\cdot,0) = 0, u_t(\cdot,0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, với bất kỳ $t > 0$ ta có

$$|u(\cdot,t)|_{L^\infty} \leq C\sum_{i=0}^{n-1}||\nabla^i\psi||_{L^1}$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc số chiều n và tốc độ lan truyền a.

Các nghiệm không chỉ bị chặn toàn cục mà còn giảm về 0 khi $t \to \infty$ khi số chiều không gian $n \geq 2$. Đây điểm khác hẳn so với trường hợp số chiều không gian 1. Từ công thức nghiệm D'Alembert có thể thấy nó không những không giảm về 0.

Định lý 1.10. *Cho $n \geq 2$, ψ là hàm trơn trong $\mathbb{R}^n$, và u là nghiệm của bài toán*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$
$$u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, với bất kỳ $t > 1$ ta có

$$|u(\cdot, t)|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} ||\nabla^i \psi||_{L^1}$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc số chiều n và tốc độ lan truyền a.

Đánh giá độ triệt tiêu trong Định lý 1.10 là tối ưu khi t lớn. Nó đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nghiệm toàn cục của phương trình truyền sóng phi tuyến. Chú ý độ triệt tiêu thay đổi khi số chiều thay đổi.

Trước khi đưa ra chứng minh các kết quả trên, ta chứng minh t^{-1} đúng là độ triệt tiêu khi số chiều $n = 3$ bằng lập luận hình học. Từ (1.16) nghiệm u được cho bởi

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_{at}(x)} \psi(y) dS_y, (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Giả sử ψ có giá compact nghĩa là $\operatorname{supp} \psi \subset B_R$ với $R > 0$ đủ lớn. Khi đó

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_{at}(x) \cap B_R} \psi(y) dS_y, (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Không khó để nhìn thấy rằng, với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$ có

$$\text{diện tích} |B_R \cap \partial B_{at}(x)| \leq |\partial B_R| = 4\pi R^2.$$

Khi đó

$$|u(x, t)| \leq \frac{R^2}{t} \sup_{\mathbb{R}^3} |\psi|.$$

Tuy nhiên đánh giá trên có điểm không thuận lợi vì có sự xuất của giá của ψ trong hằng số.

Ta quay trở lại chứng minh các Định lý 1.9 và Định lý 1.10. Việc chứng minh sử dụng việc biểu diễn nghiệm.

Chứng minh Định lý 1.9 và Định lý 1.10. Trước hết ta chứng minh trường hợp số chiều lẻ $n = 2m + 1$. Ta sử dụng công thức (1.25)

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n} \sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} t^{i+1} \partial_t^i [\Psi(x, at)]$$

với

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) =& \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B_t(x)} \psi(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} \psi(x + t\omega) dS_\omega, \\ \partial_t^i \Psi(x,t) =& \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} \partial_\nu^i \psi(x + t\omega) dS_\omega. \end{aligned}$$

Ta có thể giả sử giá của ψ là compact vì

- $u(x,t)$ hoàn toàn xác định bởi giá trị của ψ và các đạo hàm của nó trên mặt cầu $\partial B_{at}(x)$;
- chọn hàm $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\eta = 1$ trong $B_{a(t+1)}(x), \eta = 0$ ngoài $B_{a(t+2)}(x)$ và các $\nabla^k \eta$ bị chặn đều theo (x,t), chẳng hạn

  $$\eta(y) = \int_{B_{a(t+1/2)}(x)} \rho(y - z) dz,$$

  với

  $$\rho(y) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{4|y|^2 - 1}} & \text{khi } |y| < 1/2, \\ 0 & \text{khi } |y| \geq 1/2, \end{cases}$$

  trong đó hằng số C để $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$;
- thay ψ bởi $\eta\psi$.

Do ψ có giá compact nên với $\omega \in \partial B_1$ có

$$\partial_t^i \psi(x + at\omega) = -\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s} [\partial_t^i \psi(x + as\omega)] ds.$$

Khi đó

$$\partial_t^i [\Psi(x, at)] = -\frac{a^i}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} dS_\omega \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s} [\partial_t^i \psi(x + as\omega)] ds.$$

Với $s \geq t \geq 1, i = 0, 1, \ldots, m-1 = \dfrac{n-3}{2}$ có

$$t^{i+1} \leq t^m \leq \frac{s^{2m}}{t^m} = \frac{s^{n-1}}{t^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}|t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)]| \leq & \frac{a^{i+1}}{\omega_n t^{\frac{n-1}{2}}} \int_t^\infty s^{n-1} ds \int_{|\omega|=1} |(\nabla^{i+1}\psi)(x+as\omega)| dS_\omega \\ \leq & \frac{a^{i+1-n}}{\omega_n t^{-\frac{n-1}{2}}} ||\nabla^{i+1}\psi||_{L^1}.\end{aligned}$$

Ta đã chứng minh Định lý 1.10 cho trường hợp n lẻ. Để chứng minh Định lý 1.9 ta cần biểu diễn, khi $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\partial_t^i \psi(x+at\omega) = (-1)^{n-i-1} \int_t^\infty (s-t)^{n-i-2} \partial_s^{n-i-1}[\partial_t^i \psi(x+as\omega)] ds.$$

Với $s \geq t > 0, i = 0, 1, \ldots, n-1$ có

$$t^{i+1}(s-t)^{n-i-2} \leq s^{n-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}|t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)]| \leq & \frac{a^{n-1}}{\omega_n} \int_t^\infty s^{n-1} ds \int_{|\omega|=1} |(\nabla^{n-1}\psi)(x+as\omega)| dS_\omega \\ \leq & \frac{1}{\omega_n} ||\nabla^{n-1}\psi||_{L^1}.\end{aligned}$$

Ta đã chứng minh các Định lý cho n lẻ.

Để chứng minh cho trường hợp $n = 2m$ chẵn, ta dùng (1.29)

$$u(x,t) = \frac{1}{c_n} \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}} (t^{n-1}\Psi(x,at))$$

với

$$\begin{aligned}\Psi(x,at) = & \frac{n}{\omega_n a^{n-1} t^{n-1}} \int_{B_{at}(x)} \frac{\psi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2 - |y-x|^2}} \\ = & \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1} \frac{\psi(x+atz)dz}{\sqrt{1-|z|^2}} \\ = & \frac{n}{\omega_n} \int_0^1 \frac{r^{n-1}dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_{|\omega|=1} \psi(x+art\omega) dS_\omega.\end{aligned}$$

Tương tự trường hợp n lẻ, với $n = 2m$ ta có

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{c_n}\sum_{i=0}^{m-1} c_{m,i} t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)],\\
t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)] =& \frac{n}{\omega_n}\int_0^1 \frac{a^i r^{n+i-1}t^{i+1}dr}{\sqrt{1-r^2}}\int_{|\omega|=1}(\partial_\nu^i\psi)(x+art\omega)dS_\omega\\
=& \frac{n}{\omega_n t^{n-2}}\int_0^t \frac{a^i\tau^{n+i-1}d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\int_{|\omega|=1}(\partial_\nu^i\psi)(x+a\tau\omega)dS_\omega,\\
(\partial_\nu^i\psi)(x+a\tau\omega) =& (-1)^{n-i-1}\int_\tau^\infty (s-\tau)^{n-i-2}\partial_s^{n-i-1}[\partial_\nu^i\psi(x+as\omega)]ds.
\end{aligned}$$

Mà $\tau^{n+i-1}(s-\tau)^{n-i-2} \le t^{n-2}s^{n-1}$ khi $0 \le \tau \le \min\{s,t\}$ nên

$$\begin{aligned}
|t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)]| \le& \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\int_\tau^\infty \frac{na^{n-1}s^{n-1}ds}{\omega_n}\times\\
&\times\int_{|\omega|=1}|\nabla^{n-1}\psi(x+as\omega)|dS_\omega\\
\le& \frac{n\pi}{2\omega_n}||\nabla^{n-1}\psi||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Như vậy ta đã chứng minh Định lý 1.9 khi n chẵn.

Để chứng minh Định lý 1.10 ta tách tích phân

$$t^{i+1}\partial_t^i[\Psi(x,at)] = \frac{n}{\omega_n}\left(\int_0^{t-\epsilon} + \int_{t-\epsilon}^t\right) = \frac{n}{\omega_n}(I_1+I_2).$$

Đánh giá I_2 ta dùng biểu diễn tương tự trên, với $n = 2m$,

$$(\partial_\nu^i\psi)(x+a\tau\omega) = (-1)^{m-i}\int_\tau^\infty (s-\tau)^{m-i-1}\partial_s^{m-i}[\partial_\nu^i\psi(x+as\omega)]ds$$

và $\tau^{2m+i-1}(s-\tau)^{m-i-1} \le t^{m-1}s^{2m-1}$ khi $0 < \tau \le \min\{s,t\}$ ta có

$$\begin{aligned}
|I_2| \le& \frac{1}{t^{m-1}}\int_{t-\epsilon}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\int_\tau^\infty \frac{na^m s^{n-1}ds}{\omega_n}\times\\
&\times\int_{|\omega|=1}|\nabla^m\psi(x+as\omega)|dS_\omega\\
\le& \frac{2n\pi\sqrt{\epsilon}}{\omega_n a^{m-1}t^{m-1/2}}||\nabla^m\psi||_{L^1}.
\end{aligned}$$

Đánh giá I_1 ta dùng:

- $\tau^i \leq t^{m-1}$ khi $0 < \tau < t, t > 1$ và $i = 0, 1, \ldots, m-1$,
- $0 < t(2\epsilon - \epsilon^2) \leq t^2 - \tau^2$ khi $0 < \tau < t - \epsilon, \epsilon$ đủ nhỏ.

Khi đó

$$\begin{aligned}|I_1| \leq & \frac{1}{t^{m-1}\sqrt{2t\epsilon - \epsilon^2}} \int_0^{t-\epsilon} \tau^{n-1} d\tau \int_{|\omega|=1} |\nabla^i \psi(x + a\tau\omega)| dS_\omega \\ \leq & \frac{1}{t^{m-1/2}\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}} ||\nabla^i \psi||_{L^1}.\end{aligned}$$

Lấy $\epsilon = 1/4$ ta có chứng minh cho Định lý 1.10. □

1.2.8 Nguyên lý Duhamel

Trong mục này ta quan tâm đến bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng không thuần nhất. Lấy φ và ψ lần lượt là các hàm thuộc lớp C^2 và C^1 trong $\mathbb{R}^n$, còn f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Xét bài toán

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{1.30}$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi, u_t(\cdot, 0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.31}$$

Khi $f \equiv 0$, nghiệm u của bài toán (1.30)-(1.31) được cho bởi (1.16) khi n lẻ, và bởi (1.29) khi n chẵn. Chú ý rằng các công thức nghiệm đều có hai số hạng, chỉ sai khác nhau đạo hàm theo t. Đây không phải sự ngẫu nhiên.
Để giải bài toán (1.30)-(1.31) ta chia thành ba bài toán nhỏ sau:
Bài toán 1 :

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{1.32}$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi, u_t(\cdot, 0) = 0 \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.33}$$

Bài toán 2 :

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{1.34}$$

$$u(\cdot, 0) = 0, u_t(\cdot, 0) = \psi \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.35}$$

Bài toán 3 :

$$u_{tt} - a^2\Delta u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.36}$$

$$u(\cdot,0) = 0, u_t(\cdot,0) = 0 \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.37}$$

Tổng các nghiệm của ba bài toán trên cho ta nghiệm của bài toán (1.30)-(1.31).

Với $\psi \in C^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n), (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ta đặt

$$M_\psi(x,t) = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{\omega_n a^{n-1} t}\int_{\partial B_{at}(x)} \psi dS\right), \text{ khi } n \geq 3 \text{ và lẻ}, \tag{1.38}$$

và

$$M_\psi(x,t) = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n}{\omega_n a^{n-1}}\int_{\partial B_{at}(x)} \psi dS\right), \text{ khi } n \geq 2 \text{ và chẵn}, \tag{1.39}$$

trong đó ω_n là diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ và

$$c_n = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots(n-2) & \text{khi } n \geq 3, \text{ lẻ}, \\ 2\cdot 4\cdots n & \text{khi } n \geq 2, \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Chú ý

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{khi } n \text{ lẻ}, \\ \dfrac{n+2}{2} & \text{khi } n \text{ chẵn}, \end{cases}$$

nên từ các Định lý 1.7 và 1.8 ta có kết quả sau.

Định lý 1.11. *Cho số nguyên $k \geq 2$, $\psi \in C^{[\frac{n}{2}]+k-1}(\mathbb{R}^n)$ và $u = M_\psi$. Khi đó $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0, \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = \psi(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Tính toán trực tiếp ta thu được kết quả sau.

Định lý 1.12. *Cho số nguyên $k \geq 2$, $\psi \in C^{[\frac{n}{2}]+k}(\mathbb{R}^n)$ và $u = \partial_t M_\psi$. Khi đó $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ và thỏa mãn*

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = \varphi(x_0), \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Từ kết quả này ta nhìn lại các chứng minh cho trường hợp $n = 3$ và n lẻ.

Chứng minh. Từ Định lý trước ta có M_φ thỏa mãn phương trình truyền sóng nên $u = \partial_t M_\varphi$ đương nhiên thỏa mãn phương trình truyền sóng. Ngoài ra cũng từ Định lý trước ta có

$$u(\cdot, 0) = \partial_t M_\varphi(\cdot, 0) = \varphi.$$

Lại do M_φ thỏa mãn phương trình và $M_\varphi(\cdot, 0) = 0$ nên

$$u_t(\cdot, 0) = \partial_t^2 M_\varphi(\cdot, 0) = a^2 \Delta M_\varphi(\cdot, 0) = 0.$$

Ta hoàn thành chứng minh. □

Kết quả tiếp theo được gọi là nguyên lý Duhamel.

Định lý 1.13. *Cho số nguyên $k \geq 2$, $f \in C^{[\frac{n}{2}]+m-1}(\mathbb{R}^n)$ và u được xác định bởi*

$$u(x,t) = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau) d\tau,$$

với $f_\tau = f(\cdot, \tau)$. Khi đó $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ và thỏa mãn

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Hơn nữa nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0, \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u_t(x,t) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. Về độ trơn của u được suy ra từ Định lý 1.11. Điều kiện $u(\cdot,0)=0$ cũng dễ thấy. Ký hiệu $\omega(x,t,\tau)=M_{f_\tau}(x,t-\tau), \tau>0$, thì ω thỏa mãn

$$\begin{aligned}\omega_{tt}-a^2\Delta\omega =&0 \text{ trong } \mathbb{R}^n\times(\tau,\infty),\\ \omega(\cdot,\tau,\tau)=0, \omega_t(\cdot,\tau,\tau)=&f_\tau \text{ trên } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Với chú ý điều kiện tại $t=\tau$, tính toán

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&\omega(x,t,\tau)\big|_{\tau=t}+\int_0^t \partial_t\omega(x,t,\tau)d\tau\\ =&\int_0^t \partial_t\omega(x,t,\tau)d\tau\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}u_{tt}(x,t)=&\partial_t\omega(x,t,\tau)\big|_{\tau=t}+\int_0^t \partial_{tt}\omega(x,t,\tau)d\tau\\ =&f_t(x)+a^2\int_0^t \Delta\omega(x,t,\tau)d\tau\\ =&f(x,t)+\Delta u.\end{aligned}$$

Do đó $u_{tt}-a^2\Delta u=f$ trong $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ và $u_t(\cdot,0)=0$ trong $\mathbb{R}^n$. Ta hoàn thành chứng minh. □

1.3 Đánh giá năng lượng

Trong mục này ta đưa ra các đánh giá năng lượng cho nghiệm của các bài toán giá trị ban đầu cho phương trình hyperbolic tổng quát hơn một chút so với phương trình truyền sóng.

Ta bắt đầu bằng việc quan sát C^2-nghiệm của phương trình truyền sóng

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0 \text{ trong } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)$$

với hằng số dương a. Giả sử trạng thái ban đầu $u(\cdot,0)$ và vận tốc ban đầu $u(\cdot,0)$ có giá compact. Khi đó, do tính lan truyền với tốc độ a nên giá của $u(\cdot,t)$ vẫn compact khi $t>0$. Cố định $t>0$, có $R>0$ để $u(\cdot,s)$ có giá nằm trong B_R với bất kỳ $s\in(0,t)$. Chú ý rằng

$$u_t(u_{tt}-\Delta u)=\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla_x u|^2)-\sum_{i=1}^n(u_tu_{x_i})_{x_i}$$

nên dùng công thức dạng DIV ta có

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\{t\}}(u_t^2+|\nabla_x u|^2)dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}(u_t^2+|\nabla_x u|^2)dx.$$

Đẳng thức trên được hiểu là định luật bảo toàn năng lượng. Với phương trình hyperbolic nói chung ta không có đẳng thức mà ta chỉ có các đánh giá năng lượng.
Dưới đây $a, b_i(i=\overline{1,n}), c$ và f là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, còn φ,ψ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Xét bài toán giá trị ban đầu

$$u_{tt}-\nabla\cdot(a\nabla u)+b\cdot\nabla u+cu=f \text{ trong } \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \tag{1.40}$$

$$u(\cdot,0)=\varphi,\ u_t(\cdot,0)=\psi \text{ trên } \mathbb{R}^n. \tag{1.41}$$

Giả sử rằng hàm a dương và thỏa mãn

$$\lambda\le a(x,t)\le\Lambda, (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) \tag{1.42}$$

với λ,Λ là các hằng số dương. Khi $b_i=c=0$ và $a=1$ thì (1.40) trở lại là phương trình truyền sóng.

Tiếp theo ta đặt

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Giống như phương trình cấp 1, với mỗi điểm $P=(X,T)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ ta ký hiệu

- nón đỉnh P xác định bởi

$$C_\kappa(P)=\{(x,t):\ 0<t<T,\kappa|x-X|<T-t\},$$

- nón $C_\kappa(P)$ có mặt xung quanh

$$\partial_s C_\kappa(P)=\{(x,t):\ 0<t<T,\kappa|x-X|=T-t\},$$

- nón $C_\kappa(P)$ có đáy

$$\partial_- C_\kappa(P)=\{(x,t):\ t=0,\kappa|x-X|<T\}.$$

Định lý 1.14. *Cho a thuộc lớp $C^1, b_i(i = \overline{1,n}), c$ và f là các hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, và φ thuộc lớp C^1, ψ là hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử (1.42) xảy ra và $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ là nghiệm của bài toán (1.40)-(1.41). Khi đó với bất kỳ điểm $P = (X,T) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ và bất kỳ $\eta > \eta_0$,*

$$(\eta - \eta_0)\int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t}(u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2)dxdt \leq$$
$$\leq \int_{\partial_- C_\kappa(P)} e^{-\eta t}(\varphi^2 + \psi^2 + a|\nabla\varphi|^2)dxdt + \int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t} f^2 dxdt,$$

trong đó η_0 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $n, \lambda, L^\infty-$chuẩn của b_i, c trong $C_\kappa(P)$.

Chứng minh. Lấy số dương η. Áp dụng công thức dạng DIV cho miền $C_\kappa(P)$ và trường

$$F = (-e^{-\eta t} a u_t \nabla u, e^{-\eta t}(u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2))$$

với các chú ý

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(e^{-\eta t} a u_t \nabla u) =& e^{-\eta t} a \nabla u \cdot \nabla u_t + e^{-\eta t} u_t \nabla\cdot(a\nabla u),\\ [e^{-\eta t}(u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2)]_t =& -\eta e^{-\eta t}(u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2) +\\ &+ 2e^{-\eta t}(u u_t + u_t u_{tt} + a\nabla u\cdot\nabla u_t),\end{aligned}$$

và

- trên mặt xung quanh $\partial_s C_\kappa(P)$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị tại (x,t)
$$(\nu_1, \ldots, \nu_n, \nu_t) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+1}}\left(\kappa\frac{x-X}{|x-X|}, 1\right),$$
- trên đáy $\partial_- C_\kappa(P)$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị là $(0,-1)$ và trường
$$F = (-e^{-\eta t} a u_t \nabla u, \varphi^2 + \psi^2 + a|\nabla\varphi|^2)$$

ta có

$$\int_{\partial_s C_\kappa(P)} e^{-\eta t}\left((u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2)\nu_t - 2a u_t \nabla u\cdot\nu_x\right) dS -$$
$$-\int_{\partial_- C_\kappa(P)} (\varphi^2 + \psi^2 + a|\nabla\varphi|^2)dx = -\eta\int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t}(u^2 u_t^2 + a|\nabla u|^2)dxdt +$$
$$+ 2\int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t} u_t\left((1-c)u - b\cdot\nabla u + f\right) dxdt.$$

Lại có

$$2|u_t\left((1-c)u - b\cdot\nabla u + f\right)| \le \eta_0(u^2 + u_t^2 + a|\nabla u|^2) + f^2$$

với

$$\eta_0 = \sup_{C_\kappa(P)} |c| + \sup_{C_\kappa(P)} |b| + \frac{1}{\lambda},$$

và

$$\begin{aligned} 2|au_t\nabla u\cdot\nu_x| \le& 2a|u_t|\cdot|\nabla u|\cdot|\nu_x| \\ &\le 2|u_t|\cdot|\nabla u|\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\kappa\nu_t \\ &\le (|u_t|^2 + a|\nabla u|^2)\nu_t \end{aligned}$$

ta có điều phải chứng minh. □

Có thể thấy vai trò của nón $C_\kappa(P)$ trong chứng minh Định lý 1.14 giống như trong L^2-đánh giá năng lượng của phương trình cấp 1. Hằng số κ được chọn để tích phân trên mặt xung quanh $\partial_s C_\kappa(P)$ là không âm nên bỏ đi được.
Cũng như trong L^2-đánh giá năng lượng cho phương trình cấp 1, từ L^2-đánh giá địa phương của Định lý 1.14 ta dễ dàng thu được L^2-đánh giá năng lượng toàn cục sau:

Định lý 1.15. *Cho a thuộc lớp $C^1, b_i(i = \overline{1,n}), c$ và f là các hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$, và φ thuộc lớp C^1, ψ là hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử (1.42) xảy ra và $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))\cap C^1(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ là nghiệm của bài toán (1.40)-(1.41). Với $T>0$, nếu $f\in L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))$ và $\varphi,\nabla\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ thì với bất kỳ $\eta>\eta_0$,*

$$\begin{aligned} &(\eta-\eta_0)\int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t}(u^2+u_t^2+a|\nabla u|^2)dxdt \le \\ &\quad\le \int_{\partial_- C_\kappa(P)} e^{-\eta t}(\varphi^2+\psi^2+a|\nabla\varphi|^2)dxdt + \int_{C_\kappa(P)} e^{-\eta t}f^2dxdt, \end{aligned}$$

trong đó η_0 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $n,\lambda,L^\infty-$chuẩn của b_i, c trong $\mathbb{R}^n\times[0,T]$.