Giáo trình
Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Đặng Anh Tuấn

Ngày 26 tháng 3 năm 2016

Mục lục

1 Nhắc lại phương trình đạo hàm riêng cấp 2 **1**

1.1 Phân loại 1

1.2 Đánh giá năng lượng 12

1.2.1 Phương trình Laplace 13

1.2.2 Phương trình truyền nhiệt 15

1.2.3 Phương trình truyền sóng 17

1.3 Phương pháp tách biến 19

1.3.1 Bài toán biên Dirichlet 19

1.3.2 Bài toán biên hỗn hợp 32

Chương 1

Nhắc lại phương trình đạo hàm riêng cấp 2

1.1 Phân loại

Trong mục này ta quan tâm phương trình đạo hàm riêng tuyến tích cấp 2.
Cho Ω là một miền chứa gốc trong $\mathbb{R}^n$. Xét L là toán tử vi phân tuyến tính cấp 2 xác định bởi

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1.1.1}$$

với các hệ số a_{ij}, b_i, c là các hàm thực liên tục trên Ω. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ là ma trận đối xứng. Khi đó biểu trưng chính (principal symbol) của toán tử L được xác định bởi

$$p(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Với $f \in C(\Omega)$ ta xét phương trình không thuần nhất

$$Lu = f(x) \text{ trong } \Omega. \tag{1.1.2}$$

Hàm f được gọi là số hạng không thuần nhất của phương trình. Lấy siêu phẳng $\Sigma = \{x_n = 0\}$. Giá trị của nghiệm u và giá trị của đạo hàm theo pháp tuyến của u

trên siêu phẳng Σ được cho trong một lân cận của gốc

$$u(x',0) = u_0(x'),\ u_{x_n}(x',0) = u_1(x'). \tag{1.1.3}$$

Ta gọi Σ là siêu mặt ban đầu, u_0, u_1 là các giá trị ban đầu hay giá trị Cauchy. Bài toán (1.1.2)-(1.1.3) được gọi là bài toán giá trị ban đầu hay bài toán Cauchy.
Giả sử nghiệm của bài toán (1.1.2)-(1.1.3) là nghiệm giải tích ở quanh gốc tọa độ. Khi đó ta có thể biểu diễn nghiệm dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha x^\alpha.$$

Như vậy để giải bài toán (1.1.2)-(1.1.3) ta cần tìm các hệ số $a_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Nói cách khác ta cần tính

$$a_\alpha = \frac{\partial_x^\alpha u(0)}{\alpha!}.$$

Trước hết với $\alpha = 0$ có $u(0) = u_0(0)$, $u_{x_n}(0) = u_1(0)$

$$u_{x_i}(0) = u_{0x_i}(0), i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

và

$$\begin{aligned} u_{x_i x_j}(0) =& u_{0,x_i x_j}(0), i, j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ u_{x_i x_n}(0) =& u_{1,x_i}(0), i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Để tính $u_{x_n x_n}(0)$ ta cần đến giả thiết

$$a_{nn}(0) \neq 0.$$

Điều kiện này chính là điều kiện không đặc trưng của siêu mặt Σ tại gốc đối với toán tử L. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{x_n x_n}(0) = -\frac{1}{a_{nn}(0)} \Bigg(& \sum_{(i,j) \neq (n,n)} a_{ij}(0) u_{x_i x_j}(0) + \\ & + \sum_{i=1}^n b_i(0) u_{x_i}(0) + c(0) u(0) - f(0) \Bigg). \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Tiếp đến các đạo hàm cấp 3 có

$$\begin{aligned}
u_{x_ix_jx_k}(0) =& u_{0,x_ix_jx_k}(0),\ i,j,k = 1,2,\dots,n-1,\\
u_{x_ix_jx_n}(0) =& u_{1,x_ix_j}(0),\ i,j = 1,2,\dots,n-1,\\
u_{x_ix_nx_n}(0) =& \partial_{x_i}u_{x_nx_n}(0),\ i = 1,2,\dots,n-1.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng trong ta có thể thay 0 bởi x đủ gần gốc. Để tính $u_{x_nx_nx_n}(0)$ ta đạo hàm (1.1.2) theo biến x_n. Ta sẽ không đi chi tiết phần này. Đến đây ta có thể hình dung rằng với điều kiện $a_{nn}(0) \neq 0$ ta có thể tính được tất cả các hệ số a_α, nói cách khác ta tìm được nghiệm giải tích của bài toán (1.1.2)-(1.1.3).

Một cách tổng quát, ta xét siêu mặt Σ được cho bởi $\{\varphi = 0\}$ với hàm trơn φ xác định quanh một lân cận của gốc với $\nabla\varphi \neq 0$. Khi đó mặt Σ có pháp tuyến $\nabla\varphi$. Giả sử Σ đi qua gốc, nghĩa là $\varphi(0) = 0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\varphi_{x_n}(0) \neq 0$. Khi đó theo định lý hàm ẩn ta có thể giải phương trình $\varphi(x) = 0$ bởi $x_n = \psi(x_1, \cdots, x_{n-1})$ quanh một lân cận tại gốc. Xét phép đổi biến

$$x \mapsto y = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x)).$$

Đặt $v(y) = u(x(y))$ ta có

$$\begin{aligned}
\nabla_x u =& \nabla_x y \nabla_y v,\\
u_{x_ix_j} =& y_{x_i}^T(\nabla_y^2 v)y_{x_j} + y_{x_ix_j} \cdot \nabla_y v,
\end{aligned}$$

trong đó $\nabla_x y = (y_{k,x_\ell})_{1\le k,\ell\le n}$ là ma trận Jacobi của phép đổi biến, y^T là chuyển vị của y. Khi đó, toán tử L trong hệ tọa độ mới

$$\begin{aligned}
Lv = \sum_{k,\ell=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_{k,x_i}y_{\ell,x_j}\right) v_{y_ky_\ell} +\\
+ \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_i y_{k,x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_{k,x_ix_j}\right) v_{y_k} + cv.
\end{aligned}$$

Khi đó ta chuyển bài toán Cauchy cho $Lu = f$ với điều kiện Cauchy trên siêu mặt $\Sigma = \{\varphi = 0\}$ thành bài toán Cauchy cho $Lv = f$ với điều kiện Cauchy trên siêu mặt $\{y_n = 0\}$. Để giải bài toán sau ta cần hệ số của $v_{y_ny_n}$

$$(\nabla\varphi)^T(a_{ij})_{1\le i,j\le n}(\nabla\varphi) \neq 0 \text{ tại } x = 0.$$

Từ đây ta có khái niệm mặt đặc trưng và mặt không đặc trưng cho toán tử L như sau.

Định nghĩa 1.1. Cho toán tử L là toán tử vi phân (1.1.1) quanh một lân cận của điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$, và siêu mặt Σ trơn quanh điểm x_0. Ta nói Σ không đặc trưng tại x_0 nếu

$$p(x_0, \nu) \neq 0$$

trong đó ν là pháp tuyến của Σ tại x_0. Ngược lại, ta nói Σ đặc trưng tại x_0.

Siêu mặt được gọi là không đặc trưng nếu nó không đặc trưng tại mọi điểm trên nó. Siêu mặt được gọi là đặc trưng nếu nó đặc trưng tại mọi điểm trên nó.

Có thể tính chất này bất biến với C^2-phép đổi biến. Từ đây, nếu số hạng không thuần nhất giải tích, nếu siêu mặt là giải tích và không đặc trưng tại x_0 đối với L thì từ các điều kiện trên siêu mặt giải tích ta tính được tất cả các đạo hàm riêng của nghiệm tại x_0. Tóm lại, khi đó ta tìm được nghiệm giải tích của bài toán Cauchy. Đây chính là một phần của Định lý Cauchy-Kovalevskaya.

Siêu mặt đặc trưng có ý nghĩa gì? Câu trả lời như sau.
Với $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và Γ là siêu mặt liên tục chia Ω thành hai nửa Ω_+, Ω_-. Lấy ω là hàm liên tục trên $\Omega \setminus \Gamma$. Với mỗi $x_0 \in \Gamma$, hàm ω được gọi là có bước nhảy qua Γ tại điểm x_0 nếu hai giới hạn sau

$$\omega_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega_-}} \omega(x), \ \omega_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega_+}} \omega(x)$$

tồn tại. Khi đó hiệu

$$[\omega](x_0) = \omega_+(x_0) - \omega_-(x_0)$$

được gọi là bước nhảy của ω qua Γ tại x_0. Hàm ω được gọi là có bước nhảy trên Γ nếu nó có bước nhảy tại mọi điểm trên Γ qua Γ. Khi đó hàm $[\omega]$ xác định trên Γ. Có thể thấy rằng $[\omega] = 0$ trên Γ thì ω liên tục trên Γ và do đó liên tục trên Ω.
Kết quả dưới đây cho ta câu trả lời về ý nghĩa của siêu mặt đặc trưng.

Định lý 1.1. *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và Γ là C^1-siêu mặt chia Ω thành hai nửa. Giả sử các hệ số a_{ij}, b_i, c và hàm f đều liên tục trong Ω còn $u \in C^2(\Omega \setminus \Gamma) \cap C^1(\Omega)$ thỏa mãn*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f \text{ trong } \Omega.$$

Nếu $\nabla^2 u$ có bước nhảy thực sự qua Γ thì Γ là siêu mặt đặc trưng.

Như vậy Định lý 1.1 cho ta thấy siêu mặt đặc trưng truyền kỳ dị của nghiệm.

Chứng minh. Từ giả thiết

$$[a_{ij}] = [b_i] = [c] = 0 \text{ và } [u] = [u_{x_i}] = 0 \text{ trên } \Gamma.$$

Khi đó từ phương trình ta có

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[u_{x_i x_j}] = 0 \text{ trên } \Gamma. \tag{1.1.5}$$

Gọi ν là trường véc-tơ pháp tuyến của siêu mặt Γ. Do $[u_{x_i}] = 0$ trên Γ nên

$$(\mu \cdot \nabla)[u_{x_i}] = 0$$

với μ là trường véc-tơ tiếp xúc bất kỳ của Γ. Nói cách khác $\nabla[u_{x_i}]$ vuông góc với mặt Γ hay

$$[\nabla^2 u] = \nu\beta^T$$

với $\beta^T = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ là hàm véc-tơ trên Γ.
Cố định điểm $x_0 \in \Gamma$, có $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, còn ma trận $[\nabla^2 u(x_0)]$ là ma trận đối xứng không tầm thường. Khi đó

$$\beta = c\nu \text{ với hằng số } c \neq 0.$$

Do đó $[\nabla^2 u](x_0) = c\nu(x_0)\nu^T(x_0)$. Quay trở lại phương trình (1.1.5) ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)[u_{x_i x_j}](x_0) &= cTr((a_{ij}(x_0))_{1\le i,j\le n}\nu(x_0)\nu^T(x_0)\\ &= c\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\nu_i(x_0)\nu_j(x_0) = 0\end{aligned}$$

hay siêu mặt Γ đặc trưng tại x_0. Ta đã hoàn thành chứng minh. □

Tiếp theo ta phân loại toán tử vi phân L theo ma trận $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Cố định $x_0 \in \Omega$, ta có ma trận $(a_{ij}(x_0))_{1\le i,j\le n}$ là ma trận đối xứng nên nó có đủ n giá trị riêng thực. Ta phân loại như sau:

(i) Toán tử L được gọi là elliptic tại x_0 nếu tất cả các giá trị riêng của ma trận $(a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq n}$ cùng dấu, nghĩa là chúng cùng dương hoặc cùng âm. Dạng chính tắc của nó

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + F(x, u, \nabla u).$$

(ii) Toán tử L được gọi là hyperbolic tại x_0 nếu ma trận $(a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq n}$ có một giá trị riêng trái dấu với $(n-1)$ giá trị riêng còn lại. Dạng chính tắc của nó

$$u_{x_1 x_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + F(x, u, \nabla u).$$

(iii) Toán tử L được gọi là parabolic tại x_0 nếu ma trận $(a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq n}$ có một giá trị riêng bằng 0, và $(n-1)$ giá trị riêng còn lại cùng dấu. Dạng chính tắc của nó

$$\sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + F(x, u, \nabla u).$$

Toán tử L được gọi là elliptic trên toàn miền Ω nó nó elliptic tại mọi điểm trong Ω. Một cách tương tự với hyperbolic và parabolic.
Một vài chú ý về việc phân loại:

- Việc phân loại trên không phụ thuộc vào cách nhìn, nói cách khác nó bất biến với C^2-đổi biến.

- Ta còn có cách định nghĩa tương đương khác về trường hợp elliptic, toán tử L là elliptic tại x_0 nếu biểu trưng chính

  $$p(x_0, \xi) \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

  hay nói cách khác mọi C^1-siêu mặt trong Ω đều là không đặc trưng.

- Việc phân loại chưa thực sự đầy đủ vì còn các tình huống: hoặc tất cả các giá trị riêng đều khác không, nhưng không cùng dấu ta gọi chung là ultra-hyperbolic; hoặc có ít nhất một và nhiều nhất $(n-1)$ giá trị riêng bằng 0. Tuy nhiên khi số chiều $n = 2$ thì việc phân loại như vậy là đầy đủ. Khi đó ta có thể viết lại việc phân loại một cách trực tiếp hơn như sau.

(i) Toán tử L được gọi là elliptic tại x_0 nếu

$$det((a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq 2}) = a_{11}(x_0)a_{22}(x_0) - a_{12}^2(x_0) > 0.$$

(ii) Toán tử L được gọi là hyperbolic tại x_0 nếu

$$det((a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq 2}) = a_{11}(x_0)a_{22}(x_0) - a_{12}^2(x_0) < 0.$$

(i) Toán tử L được gọi là parabolic tại x_0 nếu

$$det((a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq 2}) = a_{11}(x_0)a_{22}(x_0) - a_{12}^2(x_0) = 0.$$

Trong phần tiếp theo của Chương này ta nghiên cứu ba toán tử chính tương ứng với từng loại này trong $\mathbb{R}^2$. Lý do

- bằng việc sử dụng phương trình đặc trưng

  $$a_{11}(dx_2)^2 - 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}(dx_1)^2 = 0$$

  ta tìm được phép đổi biến để chuyển mỗi loại toán tử về dạng chính tắc của nó;

- tính chất của toán tử được thể hiện chủ yếu bởi tính chất của phần chính;

- việc nghiên cứu ba loại này nói chung là dễ hơn cả và nó cho ta cái nhìn rõ nét nhất.

Ta xem sơ qua vài nét về các toán tử này trong $\mathbb{R}^2$.
Toán tử đầu tiên là toán tử Laplace Δ được định nghĩa bởi

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}.$$

Toán tử Laplace là toán tử elliptic trong $\mathbb{R}^2$. Khi chuyển sang hệ tọa độ cực

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,$$

toán tử Laplace có dạng

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}.$$

Phương trình

$$\Delta u = f$$

được gọi là phương trình Poisson. Đặc biệt khi $f = 0$ ta gọi nó là phương trình Laplace, nghiệm của nó là hàm điều hòa. Đây là mối nối quan trọng giữa giải tích thực, phương trình đạo hàm riêng với giải tích phức vì hàm chỉnh hình có cả phần thực và phần ảo đều là hàm điều hòa. Một trong các nghiệm quan trọng của hàm điều hòa là hàm điều hòa đa thức thuần nhất được lấy ra từ cách tách phần thực và phần ảo của đơn thức z^k.

Mặc dù toán tử Laplace chỉ có các đường không đặc trưng, nghĩa là theo Định lý Cauchy-Kovalevskaya bài toán Cauchy với điều kiện Cauchy giải tích trên đường cong giải tích thì phương trình Laplace có duy nhất nghiệm giải tích, nhưng nó vẫn có thể không đặt chỉnh. Tính đặt chỉnh, theo Hadamard, cho mỗi bài toán (gồm phương trình và các điều kiện biên hay điều kiện ban đầu hay cả hai) gồm có

- bài toán phải có nghiệm,
- bài toán chỉ có đúng một nghiệm,
- nghiệm của bài toán phụ thuộc liên tục vào các điều kiện.

Với bài toán Cauchy cho phương trình Laplace thì tính phụ thuộc liên tục vào điều kiện biên có thể bị phá vỡ.

Ví dụ 1.1. Xét phương trình Laplace trong $\mathbb{R}^2$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2$$

với điều kiện Cauchy đặt trên $\{y = 0\}$. Với mỗi số tự nhiên k xét hàm điều hòa

$$u_k(x, y) = \frac{1}{k}\sin(kx)e^{ky}$$

có

- $|\nabla u_k(x, y)| = e^{2ky}$ nên
$$\lim_{k\to\infty} |||\nabla u_k(\cdot, 0)|||_{L^\infty} = 1.$$

- $\lim_{k\to\infty} ||u_k||_{L^\infty} = 0$ nhưng

$$\lim_{k\to\infty} |||\nabla u_k(\cdot, y)|||_{L^\infty} = \infty, y > 0.$$

Toán tử tiếp theo là toán tử sóng $\Box$ xác định bởi

$$\Box u = u_{tt} - u_{xx}.$$

Toán tử sóng là toán tử hyperbolic trong $\mathbb{R}^2$. Lý do nó được gọi là toán tử sóng vì phương trình truyền sóng

$$\Box u = 0$$

mô ta dao động của một sợi dây hay sóng âm truyền trong ống nhỏ. Khác với toán tử Laplace không có đường đặc trưng nào, toán tử sóng có hai họ đường đặc trưng $x \pm t = C$. Không khó để tích phân phương trình truyền sóng khi chuyển về dạng chính tắc

$$u_{\xi\eta} = 0$$

bằng phép đổi biến $\xi = x - t, \eta = x + t$. Khi đó ta thu được nghiệm được nghiệm tổng quát của phương trình truyền sóng

$$u(x, t) = F(x - t) + G(x + t).$$

Từ đây có thể thấy sự kỳ dị của nghiệm tại thời điểm $t = 0$ xuất hiện khi $F(x), G(x)$ bị lỗi sẽ được truyền đi dọc theo các đường đặc trưng đi qua các điểm lỗi tại thời điểm ban đầu. Ngoài ra ta cũng thấy hiện tượng lan truyền với tốc độ hữu hạn của nghiệm của phương trình truyền sóng
Ngoài ra, khác với toán tử Laplace, bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng lại đặt chỉnh trong khoảng thời gian hữu hạn, nghĩa là

- với các điều kiện ban đầu

$$u(\cdot, 0) = u_0,\ u_t(\cdot, 0) = u_1$$

  chấp nhận được bài toán Cauchy có duy nhất nghiệm,

- nghiệm này phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu trong khoảng thời gian hữu hạn,

- nó có thể không còn phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu khi thời gian trôi ra vô hạn.

Ví dụ 1.2. Xét phương trình truyền sóng trong $\mathbb{R}^2$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2$$

với điều kiện Cauchy đặt trên $\{t = 0\}$. Với mỗi số tự nhiên k xét hàm sóng

$$u_k(x,t) = \frac{1}{k} e^{-kx} e^{kt}.$$

Từ đây không khó để thấy tính ổn định trong thời gian hữu hạn, không ổn định khi thời gian trôi ra vô hạn.

Cuối cùng ta xét toán tử nhiệt trong $\mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$Lu = u_t - u_{xx}.$$

Toán tử nhiệt thuộc loại parabolic. Nó mô tả nhiệt độ trong một thanh cách nhiệt với môi trường. Khác với toán tử truyền sóng có điều kiện ban đầu đặt trên đường $\{t = 0\}$ là đường không đặc trưng, đường ban đầu $\{t = 0\}$ với phương trình truyền nhiệt lại là đường đặc trưng. Nếu điều kiện ban đầu giải tích gần gốc, ta có thể dùng nó để tính tất cả các đạo hàm riêng của nghiệm của phương trình truyền nhiệt

$$u_t - u_{xx} = 0$$

tại gốc. Tuy nhiên điều kiện ban đầu không xác định một cách duy nhất nghiệm trong không gian các hàm trơn. Ta sẽ thấy điều này ở ví dụ của Tikhonov. Ngoài ra việc xác định nghiệm khi $t > 0$ không đơn giản từ việc biết giá trị tại thời điểm ban đầu trong một lân cận của gốc mà còn cần đến tất cả các giá trị ban đầu khác. Tính chất này được hiểu như tốc độ lan truyền vô hạn của toán tử truyền nhiệt. Điểm này lại là một tính chất khác so với phương trình truyền sóng.

Tiếp theo ta bàn về xuất sứ vật lý của các toán tử Laplace, toán tử sóng và toán tử nhiệt trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Ta bắt đầu với toán tử Laplace. Nghiệm u của phương trình Laplace thường là hàm mật độ của một dung dịch, hay hàm nhiệt độ trong môi trường ở trạng thái cân bằng

(equilibrium), nghĩa là nó không còn thay đổi theo thời gian nữa. Khi đó dòng F của dung dịch, hay dòng nhiệt qua bất kỳ một mặt kín nào cũng bằng 0, nghĩa là

$$\int_{\partial\Omega'} F \cdot \nu dS = 0$$

với bất kỳ miền Ω' nào trong miền không gian đang xét Ω, ν là pháp tuyến ngoài đơn vị của mặt $\partial\Omega'$. Từ công thức dạng DIV ta có

$$\int_{\Omega'} \operatorname{div} F dx = 0$$

hay $\operatorname{div} F = 0$ trong Ω. Lại do tính chất của dòng dung dịch, hay dòng nhiệt dịch chuyển từ vùng có mật độ cao đến nới có mật độ thấp nên thường ta có

$$F = -a\nabla u, \text{ với } a \text{ là hằng số.}$$

Từ đó dẫn đến hàm mật độ là nghiệm của phương trình Laplace

$$\operatorname{div}(-a\nabla u) = -a\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega.$$

Biểu trưng chính của toán tử Laplace

$$p(\xi) = |\xi|^2, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Điều thú vị toán tử Laplace bất biến đối với phép đổi tọa độ trực giao.
Trường hợp nhiệt độ u thay đổi theo thời gian thì tổng dòng nhiệt qua mặt kín và sự thay đổi nhiệt trong miền mặt đó bao quanh đó bằng 0, nghĩa là

$$\int_{\partial\Omega'} F \cdot \nu dS + \frac{d}{dt}\int_{\Omega'} u dx = 0$$

với bất kỳ miền Ω' nào trong miền không gian đang xét Ω, ν là pháp tuyến ngoài đơn vị của mặt $\partial\Omega'$. Tương tự trên ta có hàm nhiệt độ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt

$$u_t = a\Delta u \text{ trong } \Omega \times (0, T).$$

Biểu trưng chính của toán tử nhiệt

$$p(\xi, \tau) = -a|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}.$$

Siêu mặt $\{\varphi(x,t)=0\}$ là không đặc trưng khi và chỉ khi

$$-|\nabla_x\varphi|^2 \neq 0 \text{ tại mọi điểm trên siêu mặt đó.}$$

Có thể thấy siêu phẳng ban đầu $\{t=0\}$ là siêu mặt đặc trưng của toán tử nhiệt.
Với toán tử sóng $\Box$, thì nghiệm u của phương trình truyền sóng mô tả sự dao động quanh vị trí cân bằng của một sợi dây khi $n=1$, một màng rung khi $n=2$, của các hạt trong không khí khi $n=3$. Khi đó theo Định luật Newton, tích của khối lượng và gia tốc bằng lực tác động, nghĩa là

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\Omega'} u dx = -\int_{\partial\Omega'} F\cdot\nu dS,$$

với F là lực tác động lên Ω' qua mặt Ω'. Trong miền đàn hồi (elastic) lực F tỷ lệ với $-\nabla u$, nghĩa là

$$F = -a\nabla u.$$

Khi đó, từ công thức dạng DIV ta dẫn đến hàm biên độ u là nghiệm của phương trình truyền sóng

$$u_{tt} = -a\Delta u \text{ trong } \Omega\times(0,T).$$

Biểu trưng chính của toán tử truyền sóng

$$p(\xi,\tau) = \tau^2 - a|\xi|^2, \xi\in\mathbb{R}^n, \tau\in\mathbb{R}.$$

Siêu mặt $\{\varphi(x,t)=0\}$ không đặc trưng khi và chỉ khi

$$\varphi_t^2 - a|\nabla_x\varphi|^2 \neq 0 \text{ tại mọi điểm trên siêu mặt đó.}$$

Qua mỗi điểm (x_0,t_0) có mặt nón đặc trưng

$$a|x-x_0|^2 = (t-t_0)^2.$$

1.2 Đánh giá năng lượng

Trong mục này ta xét $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1. Trên biên $\partial\Omega$ có trường véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị ν. Khi đó ta có công thức dạng DIV

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot\nu dS$$

với $F = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ là trường véc-tơ thuộc lớp $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, và $\operatorname{div} F = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} f_k$.

1.2.1 Phương trình Laplace

Xét bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = f \text{ trong } \Omega, \tag{1.2.1}$$

$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{1.2.2}$$

Xét tích phân năng lượng

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

Giả sử $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là hai nghiệm của bài toán (1.2.1)-(1.2.2). Đặt $u = u_1 - u_2$ thì u thỏa mãn bài toán (1.2.1)-(1.2.2) với $f \equiv 0, \varphi \equiv 0$.
Áp dụng công thức dạng DIV cho trường $F = u\nabla u$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u\nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} (u\nabla u) \cdot \nu dS.$$

Mà

- $\operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + |\nabla u|^2 = |\nabla u|^2$ trong Ω,
- $(u\nabla u) \cdot \nu = u\partial_\nu u = 0$ trên $\partial\Omega$

nên $E(u) = 0$. Khi đó không khó để chỉ ra $u \equiv 0$ hay bài toán (1.2.1)-(1.2.2) có duy nhất nghiệm trong $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.
Bằng cách tương tự ta chứng minh được đánh giá sau:

Mệnh đề 1.2. *Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là nghiệm của bài toán* (1.2.1)-(1.2.2) *với $f \in C(\bar{\Omega})$ còn $\varphi \equiv 0$. Khi đó ta có đánh giá*

$$2E(u) \leq ||f||_{L^2} ||u||_{L^2}.$$

Chứng minh. Tương tự như chứng minh tính duy nhất ở trên và

- $\operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + |\nabla u|^2 = uf + |\nabla u|^2$ trong Ω,

- $(u\nabla u)\cdot\nu = u\partial_\nu u = 0$ trên $\partial\Omega$

ta có

$$2E(u) = -\int_\Omega u(x)f(x)dx.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có điều phải chứng minh. □

Để có ước lượng tiên nghiệm ta cần đến bất đẳng thức Poincare sau:

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Poincare)**.** *Cho $u \in C^1(\bar{\Omega})$ mà $u = 0$ trên $\partial\Omega$. Khi đó*

$$||u||_{L^2} \le C||\nabla u||_{L^2}$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc $n, d(\Omega) = \sup\{|x-y| :\ x, y \in \Omega\}$ đường kính của Ω.

Chứng minh. Bằng cách dịch chuyển ta có thể giả sử Ω chứa gốc tọa độ.
Áp dụng công thức dạng DIV cho trường $F = u^2(x)x$ ta được

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u^2(x)x)dx = \int_{\partial\Omega} u^2(x)(x\cdot\nu)dS.$$

Mà

- $\operatorname{div}(u^2(x)x) = nu^2(x) + 2u(x)(x\cdot\nabla u(x))$ trong Ω,
- $u^2(x)(x\cdot\nu) = 0$ trên $\partial\Omega$

nên

$$n\int_\Omega u^2(x)dx = -2\int_\Omega u(x)(x\cdot\nabla u(x))dx.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

- $|x\cdot\nabla u(x)| \le |x|\cdot|\nabla u(x)|$
- $\int_\Omega |u(x)|\cdot|\nabla u(x)|dx \le ||u||_{L^2}||\nabla u||_{L^2}$

và $|x| \le d(\Omega)$ (do Ω chứa gốc tọa độ) ta có

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u(x)(x\cdot\nabla u(x))dx\right| &\le d(\Omega)\int_\Omega |u(x)|\cdot|\nabla u(x)|dx\\ &\le d(\Omega)||u||_{L^2}||\nabla u||_{L^2}.\end{aligned}$$

Từ đây không khó để có bất dẳng thức Poincare. □

Sử dụng bất đẳng thức Poincare và Mệnh đề 1.2 ta có ước lượng tiên nghiệm sau:

Định lý 1.4. *Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ thỏa mãn các giả thiết của Mệnh đề 1.2. Khi đó*

$$||u||_{L^2} + ||\nabla u||_{L^2} \leq C||f||_{L^2}$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc $n, d(\Omega)$.

Từ ước lượng tiên nghiệm trên ta dẫn đến:

- tính duy nhất nghiệm như ở phần đầu,
- tính ổn định của bài toán (1.2.1)-(1.2.2) khi $f \in C(\Omega), \varphi \equiv 0$.

1.2.2 Phương trình truyền nhiệt

Xét bài toán biên hỗn hợp

$$u_t - \Delta u = f \text{ trong } \Omega \times (0, \infty), \tag{1.2.3}$$

$$u(x,t) = u_0(x) \text{ trên } \Omega \times \{0\}, \tag{1.2.4}$$

$$u(x,t) = \varphi \text{ trên } \partial\Omega \times [0, \infty). \tag{1.2.5}$$

Bằng cách dùng tích phân năng lượng

$$E(t) = \int_\Omega u^2(x,t)dx$$

và công thức dạng DIV ta có thể dẫn đến tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.2.3)-(1.2.5). Công việc này xem như bài tập nhỏ. Dưới đây ta sẽ chứng minh ước lượng tiên nghiệm cho bài toán (1.2.3)-(1.2.5) khi $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), u_0 \in C(\bar{\Omega}), \varphi \equiv 0$. Cụ thể như sau

Định lý 1.5. *Giả sử $u \in C^2(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ là nghiệm của bài toán (1.2.3)-(1.2.5) với $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), u_0 \in C(\bar{\Omega}), \varphi \equiv 0$. Khi đó*

$$||u(\cdot, t)||_{L^2} \leq ||u_0||_{L^2} + \int_0^t ||f(\cdot, s)||_{L^2} ds, t > 0.$$

Chứng minh. Đặt

$$J(t) = E^{1/2}(t)$$

ta có

- $J(t) = ||u(\cdot, t)||_{L^2}, J(0) = ||u_0||_{L^2}$ nên ước lượng tiên nghiệm cần chứng minh

$$J(t) - J(0) \leq \int_0^t ||f(\cdot, s)||_{L^2} ds$$

- $E(t) = J^2(t)$ nên

$$J'(t)J(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)dx.$$

Với mỗi $t \geq 0$, sử dụng công thức dạng DIV cho trường

$$F = u(x,t)\nabla_x u(x,t)$$

ta được

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u(x,t)\nabla_x u(x,t))dx = \int_{\partial\Omega} u(x,t)(\nabla_x u(x,t)\cdot\nu)dS.$$

Lại có u là nghiệm của bài toán nên

- $\operatorname{div}(u\nabla_x u) = \frac{1}{2}(u^2)_t - u(u_t - \Delta u) + |\nabla_x u|^2 = \frac{1}{2}(u^2)_t + |\nabla_x u|^2 - uf,$
- $u(x,t)(\nabla u(x,t)\cdot\nu) = 0$ trên $\partial\Omega \times [0,\infty)$.

Do đó

$$J'(t)J(t) = \int_\Omega |\nabla_x u(x,t)|^2 dx - \int_\Omega u(x,t)f(x,t)dt.$$

Lại dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta thu được

$$J'(t)J(t) \leq J(t)||f(\cdot,t)||_{L^2}, t \geq 0.$$

Chú ý $J(t) \geq 0, t \geq 0$, nên nếu tại $t_0 > 0$ có $J(t_0) = 0$ thì $J'(t_0) = 0$. Do đó từ bất đẳng thức trên ta có

$$J'(t) \leq ||f(\cdot,t)||_{L^2}, t > 0.$$

Từ đây không khó để có ước lượng tiên nghiệm cần chứng minh. □

1.2.3 Phương trình truyền sóng

Xét bài toán biên hỗn hợp

$$u_{tt} - \Delta u = f \text{ trong } \Omega \times (0, \infty), \tag{1.2.6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, t) = u_1(x) \text{ trên } \Omega \times \{0\}, \tag{1.2.7}$$

$$u(x, t) = \varphi \text{ trên } \partial\Omega \times [0, \infty). \tag{1.2.8}$$

Bằng cách dùng tích phân năng lượng

$$E(t) = \int_\Omega (u_t^2(x, t) + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx$$

và công thức dạng DIV ta có thể dẫn đến tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.2.6)-(1.2.8). Công việc này xem như bài tập nhỏ. Dưới đây ta sẽ chứng minh ước lượng tiên nghiệm cho bài toán (1.2.6)-(1.2.8) khi $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), u_0 \in C^2(\bar{\Omega}), u_1 \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi \equiv 0$. Cụ thể như sau

Định lý 1.6. *Giả sử $u \in C^2(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ là nghiệm của bài toán (1.2.6)-(1.2.8) với $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), u_0 \in C^2(\bar{\Omega}), u_1 \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi \equiv 0$. Khi đó*

$$\begin{aligned}(||u_t(\cdot, t)||_{L^2} + ||\nabla_x u(\cdot, t)||_{L^2})^{1/2} \leq (||u_1||_{L^2} + ||\nabla_x u_0||_{L^2})^{1/2} + \\ + \int_0^t ||f(\cdot, s)||_{L^2} ds, t \geq 0,\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

và

$$\begin{aligned}||u(\cdot, t)||_{L^2} \leq ||u_0||_{L^2} + t\,(||u_1||_{L^2} + ||\nabla_x u_0||_{L^2})^{1/2} + \\ + \int_0^t (t - s)||f(\cdot, s)||_{L^2} ds, t \geq 0.\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Chứng minh. Không khó để thấy ước lượng (1.2.10) được suy rs từ (1.2.9) bằng cách lấy tích phân. Để chứng minh (1.2.9), tương tự ước lượng cho phương trình truyền nhiệt, ta xét

$$J(t) = E^{1/2}(t)$$

có

- nên ước lượng tiên nghiệm cần chứng minh

$$J(t) - J(0) \leq \int_0^t ||f(\cdot, s)||_{L^2} ds$$

- $E(t) = J^2(t)$ nên

$$J'(t)J(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t^2(x,t) + |\nabla_x u(x,t)|^2)dx.$$

Với mỗi $t \geq 0$, sử dụng công thức dạng DIV cho trường

$$F = u_t(x,t)\nabla_x u(x,t)$$

ta được

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u_t(x,t)\nabla_x u(x,t))dx = \int_{\partial\Omega} u_t(x,t)(\nabla_x u(x,t)\cdot\nu)dS.$$

Lại có u là nghiệm của bài toán nên

- $\operatorname{div}(u_t\nabla_x u) = \dfrac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla_x u|^2)_t - u_t f,$
- $u_t(x,t)(\nabla u(x,t)\cdot\nu) = 0$ trên $\partial\Omega \times [0,\infty)$.

Do đó

$$J'(t)J(t) = -\int_\Omega u_t(x,t)f(x,t)dt.$$

Lại dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta thu được

$$J'(t)J(t) \leq J(t)||f(\cdot,t)||_{L^2}, t \geq 0.$$

Chú ý $J(t) \geq 0, t \geq 0$, nên nếu tại $t_0 > 0$ có $J(t_0) = 0$ thì $J'(t_0) = 0$. Do đó từ bất đẳng thức trên ta có

$$J'(t) \leq ||f(\cdot,t)||_{L^2}, t > 0.$$

Từ đây không khó để có ước lượng tiên nghiệm cần chứng minh. □

1.3 Phương pháp tách biến

1.3.1 Bài toán biên Dirichlet

Trong mục này ta quan tâm đến bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong hình tròn và hình vuông. Trước hết ta quan tâm đến bài toán trong hình vuông cho phương trình Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ trong } (0, \pi) \times (0, \pi),$$

với điều kiện biên đặt trên bốn cạnh

$$u(x, 0) = \varphi_0(x),\ u(x, \pi) = \varphi_1(x) \text{ khi } 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.3.1}$$

$$u(0, y) = \psi_0(y), u(\pi, y) = \psi_1(y) \text{ khi } 0 \leq y \leq \pi. \tag{1.3.2}$$

Để dùng phương pháp tách biến, ta tách bài toán trên thành hai bài toán nhỏ:
Bài toán 1

$$\Delta u_1 = 0 \text{ trong } (0, \pi) \times (0, \pi),$$

với điều kiện biên

$$u_1(x, 0) = 0,\ u_1(x, \pi) = 0 \text{ khi } 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.3.3}$$

$$u_1(0, y) = \psi_0(y), u_1(\pi, y) = \psi_1(y) \text{ khi } 0 \leq y \leq \pi. \tag{1.3.4}$$

Bài toán 2

$$\Delta u_2 = 0 \text{ trong } (0, \pi) \times (0, \pi),$$

với điều kiện biên

$$u_2(x, 0) = \varphi_0(x),\ u_2(x, \pi) = \varphi_1(x) \text{ khi } 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.3.5}$$

$$u_2(0, y) = 0, u_2(\pi, y) = 0 \text{ khi } 0 \leq y \leq \pi. \tag{1.3.6}$$

Có thể thấy ngay nghiệm của bài toán với điều kiện biên (1.3.1)-(1.3.2)

$$u = u_1 + u_2.$$

Ta đi vắn tắt việc dùng tách biến giải Bài toán 1:
Đầu tiên ta tìm các nghiệm tách biến không tầm thường $u_1 = XY$ của phương trình Laplace và điều kiện biên (1.3.3). Ta dẫn đến bài toán giá trị riêng Sturm-Liouville

$$Y'' + \lambda Y = 0 \text{ trong } (0, \pi)$$

với điều kiện biên $Y(0) = Y(\pi) = 0$.
Ta có các giá trị riêng $\lambda = k^2$ và hàm riêng $Y_k(x) = \sin(kx)$ tương ứng với $k = 1, 2, \ldots$.
Lại có dãy các hàm riêng chuẩn hóa

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(ky), k = 1, 2, \ldots$$

là cơ sở trực chuẩn của không gian

$$L^2_{odd} = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : \ f \text{ lẻ } \}.$$

Khi đó với mỗi hàm lẻ $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ta có khai triển

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(ky) = f \text{ trong } L^2$$

với

$$f_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ky) dy.$$

Hơn nữa

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 2 \int_0^{\pi} f^2(y) dy.$$

Quay trở lại việc tìm nghiệm tách biến, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta có nghiệm tách biến $u_{1k} = X_k Y_k$ với

$$X_k'' - k^2 X_k = 0.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của Bài toán 1 dưới dạng chuỗi

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{-kx} + b_k e^{k(x-\pi)}) \sin(ky). \tag{1.3.7}$$

Từ điều kiện biên còn lại (1.3.4) ta có hệ

$$\begin{cases} a_k + b_k e^{-k\pi} = & \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \psi_0(y) \sin(ky) dy, \\ a_k e^{-k\pi} + b_k = & \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \psi_1(y) \sin(ky) dy. \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} \int_0^\pi (e^{k\pi}\psi_0(y) - \psi_1(y)) \sin(ky) dy, \tag{1.3.8}$$

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} \int_0^\pi (e^{k\pi}\psi_1(y) - \psi_0(y)) \sin(ky) dy. \tag{1.3.9}$$

Nghiệm tìm được ở trên của Bài toán 1 được hiểu theo nghĩa sau.

Bổ đề 1.7. *Giả sử $\psi_0, \psi_1 \in L^2(0,\pi)$ và u_1 được cho bởi (1.3.7)-(1.3.9). Khi đó u_1 trơn trong $(0,\pi) \times [0,\pi]$ và thỏa mãn*

$$\Delta u_1 = 0 \text{ trong } (0,\pi) \times [0,\pi]$$

cũng như điều kiện biên

$$u_1(x,0) = u_1(x,\pi) = 0 \text{ khi } 0 < x < \pi.$$

Với hai điều kiện biên còn lại được thỏa mãn theo cách sau

$$\lim_{x\to 0^+} ||u_1(x,\cdot) - \psi_0||_{L^2} = 0, \tag{1.3.10}$$

$$\lim_{x\to \pi^-} ||u_1(x,\cdot) - \psi_1||_{L^2} = 0. \tag{1.3.11}$$

Chứng minh. Trước hết từ định nghĩa của các hệ số a_k, b_k ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k e^{-k\pi})^2 = 2\int_0^\pi \psi_0^2(x) dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{-k\pi} + b_k)^2 = 2\int_0^\pi \psi_1^2(x) dx.$$

Do

$$\frac{1 - e^{-2k\pi}}{1 + e^{-2k\pi}} \geq \frac{1 - e^{-2\pi}}{1 + e^{2\pi}} \text{ khi } k = 1, 2, \ldots,$$

nên

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < +\infty. \tag{1.3.12}$$

Lấy $\epsilon \in (0, \pi/2)$ bất kỳ. Ta sẽ chứng minh các chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^m e^{-kx} \sin(ky + \ell\pi/2),\ m = 0, 1, \ldots, \ell = 0, 1, \ldots, \tag{1.3.13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k k^m e^{k(x-\pi)} \sin(ky + \ell\pi/2),\ m = 0, 1, \ldots, \ell = 0, 1, \ldots, \tag{1.3.14}$$

hội tụ tuyệt đối đều theo (x, y) trong $[\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \pi]$. Từ đây ta có ngay u_1 có các đạo hàm riêng mọi cấp và chúng đều là hàm liên tục, xác định bởi

$$\partial_x^{m-\ell}\partial_y^{\ell}u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}((-1)^{m-\ell}a_k e^{-kx} + b_k e^{k(x-\pi)})k^m \sin(ky + \ell\pi/2),$$

$$m = 0, 1, \ldots, \ell = 0, 1, \ldots, m.$$

Do đó u_1 trơn trong $[\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \pi]$ và thỏa mãn phương trình

$$\Delta u_1 = 0 \text{ trong } [\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \pi],$$

cũng như điều kiện biên

$$u_1(x, 0) = u_1(x, \pi) = 0 \text{ khi } \epsilon \leq x \leq \pi - \epsilon.$$

Điều này xảy ra với mọi $\epsilon \in (0, \pi/2)$. Ta chỉ còn phải chứng minh hai điều kiện biên còn lại và sự hội tụ đều của các chuỗi (1.3.13)-(1.3.14).
Từ (1.3.12) ta có hai dãy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ bị chặn. Lại do chuỗi số dương

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m e^{-k\epsilon} < +\infty$$

nên theo Định lý Weierstrass ta có các chuỗi (1.3.13)-(1.3.14) hội tụ đều trong $[\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \pi]$.
Việc chứng minh hai điều kiện biên còn lại tương tự nhau nên ta chứng minh một cái.
Từ kết quả vừa chứng minh và giả thiết $\psi_0 \in L^2(0, \pi)$ ta có

$$u_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k e^{-kx} + b_k e^{k(x-\pi)}) \sin(ky) \text{ trong } L^2(0, \pi), x \in (\epsilon, \pi - \epsilon),$$
$$\psi_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k e^{-k\pi}) \sin(ky) \text{ trong } L^2(0, \pi).$$

Do đó điều phải chứng minh chuyển thành

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(1 - e^{-kx}) + b_k e^{-k\pi}(1 - e^{kx})\right)^2 = 0.$$

Để chứng minh điều này ta chứng minh

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(1-e^{-kx})^2 = 0, \tag{1.3.15}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 e^{-2k\pi}(1-e^{kx})^2 = 0. \tag{1.3.16}$$

Lấy $\delta > 0$. Với $x \in [0,\pi]$ có

$$(1-e^{-kx})^2 \le 1, e^{-2k\pi}(1-e^{-kx})^2 \le 1$$

nên từ (1.3.12) có $n_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn để với mọi $x \in (0,\pi)$ có

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k^2(1-e^{-kx})^2 < \delta/2,$$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k^2 e^{-2k\pi}(1-e^{kx})^2 < \delta/2.$$

Lại do $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\pm kx} = 1, k = 1,2,\ldots,n_0$, nên có $\delta_1 > 0$ sao cho với $x \in (0,\delta_1)$ có

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k^2(1-e^{-kx})^2 < \delta/2,$$

$$\sum_{k=1}^{n_0} b_k^2 e^{-2k\pi}(1-e^{kx})^2 < \delta/2.$$

Từ trên ta có (1.3.15)-(1.3.16). Ta đã hoàn thành chứng minh. □

Không khó để thấy

$$\lim_{y\to 0^+} ||u_1(\cdot,y)||_{L^2} = 0, \lim_{y\to \pi^-} ||u_1(\cdot,y)||_{L^2} = 0.$$

Khi đó bằng cách giải tương tự trên cho Bài toán 2 ta có nghiệm

$$u_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{-ky} + d_k e^{k(y-\pi)})\sin(kx),$$

với

$$c_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(e^{k\pi}-e^{-k\pi})}\int_0^{\pi}(e^{k\pi}\varphi_0(x)-\varphi_1(x))\sin(kx)dx,$$

$$d_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(e^{k\pi}-e^{-k\pi})}\int_0^{\pi}(e^{k\pi}\varphi_1(x)-\varphi_0(x))\sin(kx)dx.$$

Nghiệm này cũng thỏa mãn Bài toán 2 theo cách tương tự Bổ đề 1.7. Từ Bổ đề 1.7, nghiệm $u = u_1 + u_2$ của phương trình Laplace với điều kiện biên (1.3.1)-(1.3.2) thỏa mãn theo cách sau.

Định lý 1.8. *Cho các hàm $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ thuộc $L^2(0,\pi)$. Khi đó nghiệm $u = u_1 + u_2$ là hàm trơn trong $(0,\pi) \times (0,\pi)$ và thỏa mãn phương trình Laplace trong $(0,\pi) \times (0,\pi)$. Hơn nữa nó thỏa mãn điều kiện biên theo cách sau*

$$\lim_{x\to 0^+} ||u(x,\cdot) - \psi_0||_{L^2} = 0, \lim_{x\to \pi^-} ||u(x,\cdot) - \psi_1||_{L^2} = 0, \tag{1.3.17}$$

$$\lim_{y\to 0^+} ||u(\cdot,y) - \varphi_0||_{L^2} = 0, \lim_{y\to \pi^-} ||u(\cdot,y) - \varphi_1||_{L^2} = 0. \tag{1.3.18}$$

Phần tiếp theo ta xem khi nào nghiệm trong Định lý 1.8 liên tục đến tận biên. Có thể thấy ngay rằng muốn nghiệm liên tục đến tận biên thì điều kiện biên liên tục, nghĩa là các hàm φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1 thuộc $C[0,\pi]$ và thỏa mãn điều kiện tương thích

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \varphi_1(\pi) = \psi_1(\pi),$$

$$\varphi_0(\pi) = \psi_1(0), \varphi_1(0) = \psi_0(\pi).$$

Dưới đây ta sẽ chỉ ra rằng các điều kiện trên là các điều kiện đủ để nghiệm trong Định lý 1.8 liên tục đến tận biên, nghĩa là trong (1.3.21)-(1.3.22) thay L^2 bởi L^∞. Tuy nhiên ta cần thêm một bước trước khi tách thành hai bài toán 1 và 2: khử bốn đỉnh. Việc khử bốn đỉnh nhằm là điều kiện biên của các bài toán 1 và 2 vẫn còn liên tục, nói cách khác nếu ban đầu chưa có

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = \psi_0(\pi) = \psi_1(\pi) = 0$$

mà tách ngay như trên thì hai bài toán 1 và 2 không thỏa mãn điều kiện tương thích. Lúc này nghiệm tìm được sẽ xuất hiện hiện tượng Gibb, cụ thể nói chung chúng không thỏa mãn điều kiện biên tại bốn đỉnh.
Vậy khử như nào? Ta dùng hàm

$$v(x,y) = a(x^2 - y^2) + bxy + cx + dy + e$$

với các hằng số a, b, c, d, e thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} v(0,0) = & e = \varphi_0(0), \\ v(0,\pi) = & -\pi^2 a + \pi d + e = \psi_0(\pi), \\ v(\pi,0) = & \pi^2 a + \pi c + e = \varphi_0(\pi), \\ v(\pi,\pi) = & \pi^2 b + \pi c + \pi d + e = \psi_1(\pi). \end{cases}$$

Bằng cách đặt $w = u - v$, để đơn giản nhưng không mất tính tổng quát ta giả sử

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = 0, \varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0,$$
$$\psi_0(0) = \psi_0(\pi) = 0, \psi_1(0) = \psi_1(\pi) = 0.$$

Lúc này ta có thể coi $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ là các hàm liên tục, lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π trên toàn trục số. Khi đó ta viết lại

$$\begin{aligned} &(a_k e^{-kx} + b_k e^{k(x-\pi)}) \sin(ky) = \\ &\quad = \frac{2\sin(ky)}{\sqrt{\pi}(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} \int_0^\pi \big(e^{-kx}[e^{k\pi}\psi_0(z) - \psi_1(z)] + \\ &\quad + e^{k(x-\pi)}[e^{k\pi}\psi_1(z) - \psi_0(z)]\big) \sin(kz) dz \\ &\quad = \frac{e^{-kx}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^\pi \psi_0(z) \cos(k(y-z)) dz + \\ &\quad + \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{\sqrt{\pi}(e^{k\pi} - e^{-k\pi})} \int_{-\pi}^\pi (\psi_1(z) - e^{-k\pi}\psi_0(z)) \cos(k(y-z)) dz. \end{aligned}$$

Lại có

- $\left| \int_{-\pi}^\pi (\psi_1(z) - e^{-k\pi}\psi_0(z)) \cos(k(y-z)) dz \right| \le M, k = 1, 2, \ldots,$ vì $\psi_0, \psi_1 \in C[0, \pi]$;
- $\sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{1}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} < +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{kx} - e^{-kx}) = 0, k = 1, 2, \ldots.$

Do đó

$$\lim_{x \to 0^+} \sup_{y \in [0,\pi]} \sum_{k=1}^\infty \left| \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \int_{-\pi}^\pi (\psi_1(z) - e^{-k\pi}\psi_0(z)) \cos(k(y-z)) dz \right| = 0.$$

Để đi tiếp ta quan tâm đến nhân Poisson

$$P_r(z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(z)+r^2}, 0 \le r < 1, z \in (-\pi, \pi).$$

Một vài tính chất của nhân Poisson:

- $0 < P_r(z) \le \dfrac{1-r^2}{4r\sin^2(z/2)}, 0 \le r < 1, z \in (-\pi, \pi)$ nên với $\delta \in (0, \pi)$ ta có

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta<|z|<\pi} P_r(z)dz = 0.$$

- $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(z)dz = 2\pi$.

Từ tính chất này không khó dẫn đến bổ đề sau:

Bổ đề 1.9. *Cho $\varphi \in C(\mathbb{R})$, tuần hoàn chu kỳ 2π. Khi đó*

$$\lim_{r\to 1^-} \sup_{y\in[-\pi,\pi]} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y-z)\varphi(z)dz - \varphi(y) \right) = 0.$$

Sử dụng Bổ đề 1.9 với chú ý lấy $r = e^{-x}$ và

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kz) = \frac{1}{2} P_r(z)$$

cũng như tính lẻ của ψ_0 ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \sup_{y\in[0,\pi]} |u_1(x,y) - \psi_0(y)| = 0.$$

Từ đây ta có kết quả sau:

Định lý 1.10. *Cho $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in C[0,\pi]$ thỏa mãn điều kiện*

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = 0, \varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0,$$
$$\psi_0(0) = \psi_0(\pi) = 0, \psi_1(0) = \psi_1(\pi) = 0.$$

Khi đó nghiệm $u = u_1 + u_2$ thuộc vào $C^\infty(0,\pi)\times(0,\pi) \cap C([0,\pi]\times[0,\pi])$ và thỏa mãn phương trình Laplace trong $(0,\pi)\times(0,\pi)$. Hơn nữa

$$\lim_{x\to 0^+} ||u(x,\cdot) - \psi_0||_{L^\infty} = 0, \lim_{x\to \pi^-} ||u(x,\cdot) - \psi_1||_{L^\infty} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0^+} ||u(\cdot,y) - \varphi_0||_{L^\infty} = 0, \lim_{y\to \pi^-} ||u(\cdot,y) - \varphi_1||_{L^\infty} = 0.$$

Chứng minh. Qua các bước trên, việc còn lại ta chỉ cần phải chứng minh:

$$\lim_{y\to 0^+} ||u_1(\cdot,y)||_{L^\infty} = 0, \lim_{x\to\pi^-} ||u_1(x,\cdot)-\psi_1||_{L^\infty} = 0.$$

Việc chứng minh

$$\lim_{x\to\pi^-} ||u_1(x,\cdot)-\psi_1||_{L^\infty} = 0$$

tương tự như việc chứng minh

$$\lim_{x\to 0^+} ||u_1(x,\cdot)-\psi_0||_{L^\infty} = 0$$

ở trên với việc thay đổi cách viết

$$\begin{aligned}
&(a_k e^{-kx} + b_k e^{k(x-\pi)})\sin(ky) = \\
&\quad = \frac{2\sin(ky)}{\sqrt{\pi}(e^{k\pi}-e^{-k\pi})}\int_0^\pi \big(e^{-kx}[e^{k\pi}\psi_0(z)-\psi_1(z)]+ \\
&\quad + e^{k(x-\pi)}[e^{k\pi}\psi_1(z)-\psi_0(z)]\big)\sin(kz)dz \\
&\quad = \frac{e^{k(x-\pi)}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_1(z)\cos(k(y-z))dz+ \\
&\quad + \frac{e^{k(\pi-x)}-e^{k(x-\pi)}}{\sqrt{\pi}(e^{k\pi}-e^{-k\pi})}\int_{-\pi}^{\pi}(\psi_0(z)-e^{-k\pi}\psi_1(z))\cos(k(y-z))dz.
\end{aligned}$$

Để chứng minh

$$\lim_{y\to 0^+} ||u_1(\cdot,y)||_{L^\infty} = 0$$

trước hết ta dùng

$$\lim_{x\to\pi^-} ||u_1(x,\cdot)-\psi_1||_{L^\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} ||u_1(x,\cdot)-\psi_0||_{L^\infty} = 0.$$

Cụ thể, với $\delta > 0$ bất kỳ có $\epsilon \in (0,\pi/2)$ sao cho

$$\sup_{y\in[0,\pi]} |u_1(x,y)-\psi_1(y)| < \delta/2, x\in[0,\epsilon],$$

$$\sup_{y\in[0,\pi]} |u_1(x,y)-\psi_0(y)| < \delta/2, x\in[\pi-\epsilon,\pi].$$

Lại do $\lim_{y\to 0^+} \psi_i(y) = 0, i = 0, 1$, nên có $\delta_1 > 0$ để

$$|\psi_i(y)| < \delta/2, i = 0, 1, y \in [0, \delta_1].$$

Như vậy với $x \in [0, \epsilon], y \in [0, \delta_1]$ có

$$|u_1(x, y)| < \delta.$$

Dùng Bổ đề 1.7, với $\epsilon > 0$ có $\delta_2 > 0$ sao cho

$$|u_1(x, y)| < \delta, (x, y) \in [\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \delta_2].$$

Lấy $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ta có điều phải chứng minh. □

Vấn đề tiếp theo, ta quan tâm đến việc khi nào nghiệm trong Định lý 1.8 trơn đến tận biên. Dĩ nhiên lúc đó $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ phải thuộc vào $C^\infty[0, \pi]$. Tuy nhiên điều kiện tương thích không đơn giản là nối liên tục tại bốn đỉnh mà nó còn thêm điều kiện thỏa mãn phương trình tại bốn đỉnh, nghĩa là với $\ell \in \mathbb{Z}_+$ có

$$\varphi_0^{(2\ell)}(0) = (-1)^\ell \psi_0^{(2\ell)}(0),\ \varphi_0^{(2\ell)}(\pi) = (-1)^\ell \psi_1^{(2\ell)}(0),$$

$$\varphi_1^{(2\ell)}(0) = (-1)^\ell \psi_0^{(2\ell)}(\pi),\ \varphi_1^{(2\ell)}(\pi) = (-1)^\ell \psi_1^{(2\ell)}(\pi).$$

Ta không đi sâu vào việc này mà chỉ đưa ra kết quả sau:

Định lý 1.11. *Cho $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in C^\infty[0, \pi]$ thỏa mãn điều kiện, với $\ell \in \mathbb{Z}_+$*

$$\varphi_0^{(2\ell)}(0) = \varphi_0^{(2\ell)}(\pi) = 0,\ \varphi_1^{(2\ell)}(0) = \varphi_1^{(2\ell)}(\pi) = 0,$$
$$\psi_0^{(2\ell)}(0) = \psi_0^{(2\ell)}(\pi) = 0,\ \psi_1^{(2\ell)}(0) = \psi_1^{(2\ell)}(\pi) = 0.$$

Khi đó nghiệm $u = u_1 + u_2$ thuộc vào $C^\infty[0, \pi] \times [0, \pi]$ và thỏa mãn phương trình Laplace trong $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Hơn nữa

$$\lim_{x\to 0^+} ||u(x, \cdot) - \psi_0||_{L^\infty} = 0,\ \lim_{x\to \pi^-} ||u(x, \cdot) - \psi_1||_{L^\infty} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0^+} ||u(\cdot, y) - \varphi_0||_{L^\infty} = 0,\ \lim_{y\to \pi^-} ||u(\cdot, y) - \varphi_1||_{L^\infty} = 0.$$

Để chứng minh kết quả trên ta chú ý rằng, với điều kiện tương thích thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π của các hàm φ_i, ψ_i, $i = 0, 1$, đều là các hàm khả vi vô hạn, tuần hoàn chu kỳ 2π trên toàn đường thẳng. Lúc đó

$$\lim_{k\to\infty} k^m \int_0^\pi \varphi_0(x)dx = 0, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Trước khi chuyển sang bài toán trong hình tròn, các bạn thử nghĩ xem nếu đổi điều kiện biên Dirichlet (1.3.1)-(1.3.2) thành điều kiện biên Neumann thì điều gì xảy ra? Ta cần sửa lại như nào?

Ta chuyển sang bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong hình tròn đơn vị B_1. Trước hết ta chuyển sang hệ tọa độ cực

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

có $B_1 = \{(r, \theta) : \ 0 \le r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$ và hàm $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, và thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0.$$

Ta sơ qua phương pháp tách biến. Ta tìm các nghiệm $v = R(r)\Phi(\theta)$ của phương trình Laplace. Khi đó ta có bài toán giá trị riêng Sturm-Liouville

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

với điều kiện biên tuần hoàn. Nó có các giá trị riêng $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, \ldots,$ và hàm riêng tương ứng

- với $k = 0$ có $\Phi_0 = a_0$,
- với $k = 1, 2, \ldots,$ có $\Phi_k = a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)$.

Lại có dãy các hàm riêng chuẩn hóa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k\theta), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(k\theta), k = 1, 2, \ldots,$$

là cơ sở trực chuẩn của $L^2(\mathbb{S}^1)$. Khi đó với mỗi $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ ta có

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)) \text{ trong } L^2(\mathbb{S}^1),$$

với

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)d\theta,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)\cos(k\theta)d\theta,\ b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{S}^1} f(\theta)\sin(k\theta)d\theta, k = 1, 2, \ldots.$$

Hơn nữa

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \int_{\mathbb{S}^1} f^2(\theta)d\theta.$$

Quay trở lại giải nghiệm tách biến, ta có

- với $k = 0$ có $R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r$,
- với $k = 1, 2, \ldots$ có $R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}$.

Lại chú ý nghiệm xác định tại gốc nên $d_k = 0, k = 0, 1, \ldots$. Khi đó ta có nghiệm tách biến

$$u_0(r, \theta) = a_0, u_k(r, \theta) = r^k(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)), k = 1, 2, \ldots.$$

Chú ý rằng $r^k\cos(k\theta), r^k\sin(k\theta)$ là các đa thức điều hòa thuần nhất bậc k trong $\mathbb{R}^2$. Nếu đặt $z = x + iy$ có

$$r^k\cos(k\theta) = Re(z^k), r^k\sin(k\theta) = Im(z^k).$$

Đến lúc ta đưa ra lời giải cho bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong B_1 với điều kiện biên

$$u\Big|_{\mathbb{S}^1} = v(1, \theta) = \varphi(\theta). \tag{1.3.19}$$

Ta tìm nghiệm có dạng

$$v(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)). \tag{1.3.20}$$

Thay vào điều kiện biên (1.3.19) ta có các hệ số

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\theta)d\theta, \tag{1.3.21}$$

và với $k = 1, 2, \dots$ có

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \tag{1.3.22}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\theta) \sin(k\theta) d\theta. \tag{1.3.23}$$

Tương tự Bổ đề 1.7 ta có kết quả sau.

Định lý 1.12. *Cho $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$ và v được cho bởi* (1.3.20)-(1.3.23). *Khi đó v trơn trong B_1 và thỏa mãn phương trình Laplace trong B_1. Hơn nữa*

$$\lim_{r \to 1^-} ||v(r, \cdot) - \varphi||_{L^2} = 0.$$

Chứng minh. Việc chứng minh Định lý tương tự như chứng minh trong Bổ đề 1.7 với chú ý

$$\partial_r^m \partial_\theta^\ell (r^k \sin(k\theta)) = k^{\ell+1}(k-1)\cdots(k-m+1) r^{k-m} \sin(k\theta + \ell\pi/2),$$

$$m, \ell = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

và

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^{\ell+1}(k-1)\cdots(k-m+1) R^{k-m} < \infty, R \in (0,1), m = 0, 1, \dots.$$

□

Từ kết quả trên, khi $r \in (0, 1)$ ta có thể viết

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} P_r(\theta - \eta) \varphi(\eta) d\eta.$$

Từ đó bằng việc dùng Bổ đề 1.9 ta có kết quả sau.

Định lý 1.13. *Cho $\varphi \in C(\mathbb{S}^1)$ và v được cho bởi* (1.3.20)-(1.3.23). *Khi đó $v \in C^\infty(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$ và thỏa mãn phương trình Laplace trong B_1. Hơn nữa*

$$\lim_{r \to 1^-} ||u(r, \cdot) - \varphi||_{L^\infty} = 0.$$

Đơn giản hơn trường hợp hình vuông, ta cũng có kết quả về tính trơn đến tận biên sau.

Định lý 1.14. *Cho $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ và v được cho bởi* (1.3.20)-(1.3.23). *Khi đó $v \in C^\infty(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$ và thỏa mãn phương trình Laplace trong B_1. Hơn nữa $v(1, \cdot) = \varphi$ trên $\mathbb{S}^1$.*

1.3.2 Bài toán biên hỗn hợp

Trong mục này ta sẽ quan tâm đến bài toán biên - giá trị ban đầu, còn gọi là bài toán biên hỗn hợp, cho phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt 1−chiều không gian.

Trước hết ta xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền nhiệt trong một đoạn $[0, \pi]$

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ trong } (0, \pi) \times (0, \infty), \tag{1.3.24}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \text{ trên } [0, \pi], \tag{1.3.25}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ khi } t \geq 0. \tag{1.3.26}$$

Về ý nghĩa vật lý,u là hàm nhiệt trên một thanh cách nhiệt với hai đầu luôn được giữ ở 0 độ.

Trước hết ta tìm các nghiệm tách biến $u = XT$ không tầm thường của phương trình truyền nhiệt (1.3.24) và hai điều kiện biên (1.3.26). Khi đó ta có bài toán giá trị riêng Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ trong } (0, \pi)$$

với điều kiện biên $X(0) = X(\pi) = 0$. Có các giá trị riêng $\lambda = k^2$ và hàm riêng $X_k = \sin(kx)$ tương ứng, $k = 1, 2, \ldots$. Giống như việc giải Bài toán 1 trong phương trình Laplace trong hình vuông, các hàm riêng chuẩn hóa

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), k = 1, 2, \ldots$$

là cơ sở trực chuẩn của không gian

$$L^2_{odd} = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : \ f \text{ lẻ } \}.$$

Khi đó với mỗi hàm lẻ $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ta có khai triển

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(kx) = f \text{ trong } L^2$$

với

$$f_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Hơn nữa

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 2\int_0^{\pi} f^2(x)dx.$$

Quay trở lại việc tìm nghiệm tách biến, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta có nghiệm tách biến $u_k = X_k T_k$ với

$$T_k' + k^2 T_k = 0.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của (1.3.24)-(1.3.26) dưới dạng chuỗi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin(kx). \tag{1.3.27}$$

Điều kiện ban đầu (1.3.25) cho ta các hệ số

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx)dx. \tag{1.3.28}$$

Nghiệm tìm được ở trên của (1.3.24)-(1.3.26) được hiểu theo nghĩa sau.

Định lý 1.15. *Giả sử $u_0 \in L^2(0,\pi)$ và u được cho bởi* (1.3.27)-(1.3.28)*. Khi đó u trơn trong $[0,\pi] \times (0,\infty)$ và thỏa mãn*

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ trong } (0,\pi) \times (0,\infty)$$

cũng như điều kiện biên

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ khi } t > 0.$$

Với điều kiện ban đầu được thỏa mãn theo cách sau

$$\lim_{t \to 0^+} ||u(\cdot,t) - u_0||_{L^2} = 0. \tag{1.3.29}$$

Chứng minh. Chứng minh kết quả này tương tự chứng minh Bổ đề 1.7 với chú ý

- $\partial_t^m \partial_x^\ell (e^{-k^2 t} \sin(kx)) = (-1)^m k^{2m+\ell} e^{-k^2 t} \sin(kx + \ell\pi/2)$, khi $m, \ell = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m+\ell} e^{-k^2 \epsilon} < +\infty, m, \ell = 0, 1, \ldots, \epsilon > 0.$

□

Tiếp theo ta quan tâm đến việc khi nào thì nghiệm u trong Định lý 1.15 liên tục đến điều kiện ban đầu. Có thể thấy ngay rằng nếu nghiệm u liên tục đến điều kiện ban đầu thì $u_0 \in C[0,\pi]$ và nó thỏa mãn điều kiện tương thích

$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0.$$

Khi đó thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π của u_0 lên toàn trục số là hàm tuần hoàn, liên tục trên toàn trục số. Khi đó, từ Định lý 1.15 nghiệm u có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\sin(kx)\int_0^{\pi} u_0(y)\sin(ky)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\cos(k(x-y))\right)u_0(y)dy \\ =& \int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y)u_0(y)dy \end{aligned} \tag{1.3.30}$$

với nhân nhiệt

$$H_t(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2 t}e^{ikx}.$$

Đến đây nếu nhân nhiệt $H_t(x)$ có các tính chất tương tự nhân Poisson $P_r(x)$, nghĩa là

(i) $H_t(x) \geq 0, x \in [-\pi,\pi]$ khi $t > 0$,

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} H_t(x)dx = 1$ khi $t > 0$,

(iii) với $\epsilon \in (0,\pi)$ có

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\epsilon<|x|<\pi} H_t(x)dx = 0$$

thì ta có ngay kết quả giống Định lý 1.10, nghĩa là kết quả sau.

Định lý 1.16. *Cho $u_0 \in C[0,\pi]$ thỏa mãn điều kiện tương thích*

$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0,$$

và u được cho bởi (1.3.27)-(1.3.28). *Khi đó $u \in C^\infty([0,\pi]\times(0,\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ trong } (0,\pi)\times(0,\infty)$$

cũng như điều kiện biên

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ khi } t > 0.$$

Với điều kiện ban đầu được thỏa mãn theo cách sau

$$\lim_{t\to 0^+} ||u(\cdot,t) - u_0||_{L^\infty} = 0. \tag{1.3.31}$$

Như vậy để có Định lý 1.16, ta sẽ đi chứng minh các tính chất của nhân nhiệt $H_t(x)$. Không khó để thấy ngay tính chất (ii). Để thấy hai tính chất còn lại ta cần đến công thức Poisson để viết lại nhân nhiệt dưới dạng

$$H_t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_t(x + 2\pi k)$$

với nhân Gauss-Weierstrass $K_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Khi đó có thể thấy ngay tính chất (i). Để thấy tính chất (ii) ta tách

$$H_t(x) = K_t(x) + \sum_{|k|\geq 1} K_t(x + 2\pi k).$$

Có

$$\int_{\epsilon<|x|<\pi} K_t(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\epsilon/\sqrt{4t}<|z|<\pi/\sqrt{4t}} e^{-z^2} dz.$$

Mà $\lim\limits_{t\to 0^+} \epsilon/\sqrt{4t} = +\infty$ nên

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\epsilon<|x|<\pi} K_t(x)dx = 0.$$

Lại có với $|x| < \pi$ và $|k| \geq 1$ có

$$\frac{|x + 2\pi k|}{|k|} \geq \pi \text{ hay } e^{-(x+2\pi k)^2/4t} \leq e^{-\pi^2 k^2/4t}.$$

Khi đó

$$\sum_{|k|\geq 1} K_t(x + 2\pi k) \leq Ct^{-1/2} \sum_{|k|\geq 1} e^{-\pi^2 k^2/4t}.$$

Với $0 < t < 1$ có

$$k^2 + \frac{1}{t} \leq \frac{\pi^2 k^2}{4t}.$$

Do đó

$$\sum_{|k|\geq 1} K_t(x+2\pi k) \leq Ct^{-1/2}e^{-1/t}.$$

Từ đây không khó để thấy tính chất (iii).

Tiếp đến ta quan tâm đến việc khi nào nghiệm trong Định lý 1.15 trơn đến tận điều kiện ban đầu. Có thể thấy để nghiệm trơn đến điều kiện ban đầu thì điều kiện ban đầu $u_0 \in C^\infty[0,\pi]$. Như thế chưa đủ và ngay cả việc thêm điều kiện tương thích

$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0$$

cũng chưa đủ. Lý do u còn thỏa mãn phương trình truyền nhiệt nên

$$u_t(0,0) = u_{xx}(0,0) \text{ và } u_t(\pi,0) = u_{xx}(\pi,0)$$

và khi u trơn đến tận điều kiện ban đầu thì

$$\partial_t^{(\ell)}u(0,0) = \partial_x^{(2\ell)}u(0,0) \text{ và } \partial_t^{(\ell)}u(\pi,0) = \partial_x^{(2\ell)}u(\pi,0), \ell = 1,2,\ldots.$$

Khi đó điều kiện tương thích để nghiệm trơn đến tận biên

$$u_0^{(2\ell)}(0) = u_0^{(2\ell)}(\pi) = 0, \ell = 0,1,\ldots.$$

Với điều kiện tương thích này không khó khăn ta có kết quả sau.

Định lý 1.17. *Cho $u_0 \in C^\infty[0,\pi]$ thỏa mãn điều kiện tương thích*

$$u_0^{(2\ell)}(0) = u_0^{(2\ell)}(\pi) = 0, \ell = 0,1,\ldots.$$

và u được cho bởi (1.3.27)-(1.3.28). *Khi đó $u \in C^\infty([0,\pi]\times[0,\infty))$ và thỏa mãn*

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ trong } (0,\pi)\times(0,\infty)$$

cũng như điều kiện biên

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ khi } t > 0,$$

và điều kiện ban đầu $u(\cdot,0) = u_0$.

Quay trở lại công thức (1.3.30), với chú ý u_0 là hàm lẻ, ta viết lại

$$u(x,t) = \int_0^\pi G(x,y,t)u_0(y)dy$$

với hàm Green

$$G(x,y,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}\sin(kx)\sin(ky).$$

Hàm Green $G(x,y,t)$ không chia sẻ các tính chất (i)-(iii) với nhân nhiệt $H_t(x)$. Tuy nhiên nó chia sẻ các tính chất tốt khác với nhân nhiệt:

đều trơn và tuần hoàn chu kỳ 2π khi $t > 0$, và lúc đó chúng đều thỏa mãn phương trình truyền nhiệt.

Ngoài ra hàm Green còn có các tính chất khác mà nhân nhiệt không có:

- tính đối xứng: $G(x,y,t) = G(y,x,t)$,
- thỏa mãn điều kiện biên thuần nhất: $G(0,y,t) = G(\pi,y,t) = 0$.

Để dùng hàm Green có hiệu quả, giống như nhân nhiệt, ta biểu diễn hàm Green qua nhân Gauss-Weierstrass nhờ công thức Poisson như sau

$$G(x,y,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(K_t(x-y+2\pi k) - K(x+y+2\pi k)).$$

Ta chuyển sang bài toán biên - giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng trong một đoạn $[0,\pi]$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ trong } (0,\pi)\times(0,\infty), \tag{1.3.32}$$

$$u(\cdot,0) = u_0,\ u_t(\cdot,0) = u_1 \text{ trên } [0,\pi], \tag{1.3.33}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ khi } t \geq 0. \tag{1.3.34}$$

Về ý nghĩa vật lý,u là hàm biên độ (đại số) so với vị trí cân bằng của một đoạn dây dao động không có tác động của ngoại lực cũng như ma sát với hai đầu luôn được giữ cố định ở vị trí cân bằng.

Trước hết ta tìm các nghiệm tách biến $u = XT$ không tầm thường của phương trình

truyền nhiệt (1.3.32) và hai điều kiện biên (1.3.34). Khi đó ta có bài toán giá trị riêng Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ trong } (0, \pi)$$

với điều kiện biên $X(0) = X(\pi) = 0$. Có các giá trị riêng $\lambda = k^2$ và hàm riêng $X_k = \sin(kx)$ tương ứng, $k = 1, 2, \ldots$. Giống như việc giải Bài toán 1 trong phương trình Laplace trong hình vuông, các hàm riêng chuẩn hóa

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), k = 1, 2, \ldots$$

là cơ sở trực chuẩn của không gian

$$L^2_{odd} = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : \ f \text{ lẻ } \}.$$

Khi đó với mỗi hàm lẻ $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ta có khai triển

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(kx) = f \text{ trong } L^2$$

với

$$f_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Hơn nữa

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx.$$

Quay trở lại việc tìm nghiệm tách biến, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta có nghiệm tách biến $u_k = X_k T_k$ với

$$T_k'' + k^2 T_k = 0.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của (1.3.32)-(1.3.34) dưới dạng chuỗi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx). \tag{1.3.35}$$

Điều kiện ban đầu (1.3.33) cho ta các hệ số

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx) dx, \tag{1.3.36}$$

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} u_1(x) \frac{\sin(kx)}{k} dx. \tag{1.3.37}$$

Khác với bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền nhiệt, đề nghiệm u xác định bởi (1.3.35)-(1.3.37) thỏa mãn phương trình truyền sóng khi $t > 0$ thì ngay từ điều kiện ban đầu đã phải đủ tốt. Cụ thể, để nghiệm u thuộc $C^2((0,\pi) \times (0,\infty))$ thì các điều kiện ban đầu $u_0 \in C^2[0,\pi]$, $u_1 \in C^1[0,\pi]$ thỏa mãn điều kiện tương thích

$$u_0(0) = 0,\ u_1(0) = 0,\ u_0''(0) = 0, \tag{1.3.38}$$

$$u_0(\pi) = 0,\ u_1(\pi) = 0,\ u_1''(\pi) = 0. \tag{1.3.39}$$

Ta có kết quả sau.

Định lý 1.18. *Giả sử $u_0 \in C^3[0,\pi], u_1 \in C^2[0,\pi]$ thỏa mãn các điều kiện tương thích* (1.3.38)-(1.3.39)*, và hàm u được xác định bởi* (1.3.35)-(1.3.37)*. Khi đó $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$ và là nghiệm của bài toán* (1.3.32)-(1.3.34)*.*

Chứng minh. Từ điều kiện tương thích, tích phân từng phần (1.3.36)-(1.3.37) ta được

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi u_0(x) \sin(kx) dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi u_0'''(x) \frac{\cos(kx)}{k^3} dx, \\ b_k =& \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi u_1(x) \frac{\sin(kx)}{k} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi u_1''(x) \frac{\sin(kx)}{k^3} dx. \end{aligned}$$

Khi đó $\{k^3 a_k\}$ là hệ số Fourier của $-u_0'''(x)$, còn $\{k^3 b_k\}$ là hệ số Fourier của $u_1''(x)$, với u_0, u_1 được xem như các hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π trên toàn trục. Do đó

$$\sum_{k=1}^\infty k^6 (a_k^2 + b_k^2) = 2 \int_0^\pi ([u_0'''(x)]^2 + [u_1''(x)]^2) dx < \infty.$$

Lại để ý rằng

$$\left| \partial_t^m \partial_x^\ell \left[(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx) \right] \right| \le k^{m+\ell} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$m, \ell = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots.$$

Do đó với $m, \ell \in \mathbb{Z}_+$ thỏa mãn $m + \ell \le 2$ thì

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^\infty \left| \partial_t^m \partial_x^\ell \left[(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \sin(kx) \right] \right| \le \\ &\le \left(\sum_{k=1}^\infty k^{2(m+\ell+1)} (a_k^2 + b_k^2) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^\infty k^{-2} \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Từ đây ta có ngay u thuộc lớp $C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$ và các đạo hàm riêng đến cấp 2 được cho bởi

$$\partial_t^m\partial_x^\ell u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{m+\ell}(a_k\cos(kt+\frac{m\pi}{2})+b_k\sin(kt+\frac{m\pi}{2}))\sin(kx+\frac{\ell\pi}{2}).$$

Từ đây không khó để thấy u là nghiệm của bài toán (1.3.32)-(1.3.34). □

Có thể thấy ngay từ chứng minh đánh giá sau

$$||u||_{C^2([0,\pi]\times[0,\infty))}\leq C\left(\sum_{i=0}^{3}||u_0^{(i)}||_{L^2}+\sum_{i=0}^{2}||u_1^{(i)}||_{L^2}\right)$$

với hằng số dương C không phụ thuộc u.
Để có nghiệm u thuộc lớp C^2 ta không cần đòi hỏi nhiều về độ trơn như Định lý 1.18, mà chỉ cần $u_0\in C^2[0,\pi]$, $u_1\in C^1[0,\pi]$ và điều kiện tương thích (1.3.38)-(1.3.39) được thỏa mãn. Việc này sẽ được chi tiết hóa trong Chương về phương trình truyền sóng.
Một vài so sánh giữa bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền nhiệt và phương trình truyền sóng:

- Với phương trình truyền nhiệt, để nghiệm trơn ở bên trong tập xác định (kể cả theo thời gian) ta chỉ cần điều kiện ban đầu thuộc vào $L^2[0,\pi]$, theo Định lý 1.15. Với phương trình truyền sóng thì độ trơn của nghiệm bằng độ trơn của điều kiện ban đầu khi số chiều không gian $n=1$, còn khi số chiều $n\geq 2$ thì độ trơn của nghiệm còn thấp hơn cả của điều kiện ban đầu.

- Với phương trình truyền nhiệt, để nghiệm tốt đến tận biên ngoài tính tốt của điều kiện ban đầu ta còn cần đến điều kiện tương thích như trong các Định lý 1.16 và Định lý 1.17. Với phương trình truyền sóng ta cũng cần đến điều kiện tương thích ngay cả khi chỉ cần nghiệm tốt ở bên trong.

Để kết thúc phần phương pháp tách biến, ta có thể giải các bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt trong miền hình vuông, hình tròn (không gian 2−chiều), hay miền hình lập phương, hình trụ, hình cầu (không gian 3−chiều). Khi đó ta gặp các chuỗi Fourier trong không gian 2−chiều và không gian 3−chiều. Khá nhiều kết quả về chuỗi Fourier nhiều chiều lặp lại chuỗi Fourier 1−chiều. Tuy nhiên những bài toán cơ bản, chẳng hạn như khảo sát sự hội tụ điểm của chuỗi Fourier nhiều chiều cho đến nay vẫn còn là bài toán mở.