Giáo trình
Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Đặng Anh Tuấn

Ngày 15 tháng 3 năm 2016

Mục lục

1 Phương trình Laplace **1**

1.1 Nghiệm cơ bản 1

1.1.1 Đồng nhất thức Green 2

1.1.2 Hàm Green 4

1.1.3 Công thức tích phân Poisson 5

1.1.4 Tính chính quy 8

1.2 Tính chất giá trị trung bình 14

1.2.1 Đặc trưng của hàm điều hòa 14

1.2.2 Ứng dụng của tính chất giá trị trung bình 17

1.3 Nguyên lý cực đại 21

1.3.1 Nguyên lý cực đại yếu 21

1.3.2 Nguyên lý cực đại mạnh 25

1.3.3 Đánh giá tiên nghiệm 29

1.3.4 Đánh giá gradient 30

1.3.5 Khử kỳ dị 34

1.3.6 Phương pháp Perron 35

1.4 Phương trình Poisson 42

1.4.1 Nghiệm cổ điển 43

1.4.2 Nghiệm yếu 48

Chương 1

Phương trình Laplace

1.1 Nghiệm cơ bản

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn phương trình

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0 \text{ trong } \Omega$$

được gọi là hàm điều hòa trong Ω.
Tiếp theo ta tìm hàm điều hòa $u(x) = v(r)$, chỉ phụ thuộc vào $r = |x|$, trong $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Bằng tính toán $v : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{n-1}{r} v'(r) + v''(r) = 0, r > 0.$$

Giải phương trình trên có hai trường hợp

(i) $n = 2$ có nghiệm $v(r) = c_1 + c_2 \ln r, r > 0$,

(ii) $n \geq 3$ có nghiệm $v(r) = c_3 + c_4 r^{2-n}, r > 0$.

Ta chuẩn hóa nghiệm bởi

$$\int_{\partial B_r} \partial_\nu u(x) dS = 1, r > 0,$$

trong đó ν pháp tuyến ngoài đơn vị trên mặt cầu $\partial B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = r\}$. Khi đó

$$\int_0^r ds \int_{\partial B_s} v'(s) dS = 1, r > 0,$$

hay $c_1 = c_3 = 0$ còn

(i) $n = 2$ có $c_2 = 1/\omega_2, \omega_2$ là chu vi đường tròn đơn vị,

(ii) $n \geq 3$ có $c_4 = \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}, \omega_n$ là diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Ta có nghiệm cơ bản của toán tử Laplace $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ xác định bởi

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_2} \ln|x| & \text{khi } n = 2, \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{khi } n \geq 3. \end{cases}$$

Tính toán trực tiếp, coi như bài tập, ta có

$$\nabla\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x}{|x|^n}, \quad \nabla^2\Gamma(x) = \frac{1}{|x|^n\omega_n}\left(Id_n - n\frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}\right)$$

trong đó Id_n là ma trận vuông đơn vị cấp n.

1.1.1 Đồng nhất thức Green

Trong mục này ta xét Ω là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 và pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên ν.
Với $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, sử dụng công thức dạng DIV cho trường $F = v\nabla\omega$ ta thu được công thức Green thứ nhất

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\omega + v\Delta\omega)dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu\omega dS.$$

Bằng cách sử dụng công thức Green thứ nhất cho $v, \omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ta thu được công thức Green thứ hai

$$\int_\Omega (v\Delta\omega - \omega\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu\omega - \omega\partial_\nu v)dS.$$

Đến đây ta dẫn đến đồng nhất thức Green sau:

Định lý 1.1 (Đồng nhất thức Green)**.** *Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Khi đó, với $x \in \Omega$*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta_y u(y)dy - \int_{\partial\Omega} (\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y) - u(y)\partial_{\nu_y}\Gamma(x-y))dS_y.$$

Chứng minh. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Khi đó $\Gamma(x - \cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}_r), \Omega_r = \Omega \setminus B_r(x)$ và thỏa mãn

- $\Delta\Gamma(x-\cdot) = 0$ trong Ω_r,
- nếu ν là trường véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị của $\partial\Omega_r$ thì khi $y \in \partial B_r(x)$
$$\partial_{\nu_y}\Gamma(x-y) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}.$$

Áp dụng công thức Green thứ hai cho $v = \Gamma(x-\cdot), \omega = u$ và Ω_r ta thu được
$$\int_{\Omega_r}\Gamma(x-y)\Delta_y u(y)dy = \int_{\partial\Omega}(\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y) - u(y)\partial_{\nu_y}\Gamma(x-y))dS_y +$$
$$+\int_{\partial B_r(x)}\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)dS_y - \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B_r(x)}u(y)dS_y$$
Khi $y \in \partial B_r(x)$ ta có
$$\Gamma(x-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_2}\ln r & \text{khi } n = 2, \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}r^{2-n} & \text{khi } n \geq 3. \end{cases}$$
Do đó
$$\left|\int_{\partial B_r(x)}\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)dS_y\right| \leq \begin{cases} r|\ln r|||\nabla u||_\infty & \text{khi } n = 2, \\ \dfrac{r}{(n-2)}||\nabla u||_\infty & \text{khi } n \geq 3. \end{cases}$$
Bằng cách dùng công thức giá trị trung bình cho hàm liên tục ta có
$$\lim_{r\to 0_+}\frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B_r(x)}u(y)dS_y = u(x).$$
Kết hợp các điều trên ta dễ dàng có chứng minh cho đồng nhất thức Green khi cho $r \to 0_+$. □

Từ các công thức Green và đồng nhất thức Green ta có các hệ quả sau:

- Lấy $v \equiv 1, \omega$ là hàm điều hòa trong Ω và $\omega \in C^1(\bar{\Omega})$ ta có
$$\int_{\partial\Omega}\partial_\nu\omega(x)dS = 0.$$
- Lấy $u \equiv 1$ ta có $\int_{\partial\Omega}\partial_{\nu_y}\Gamma(x-y)dS_y = 1, x \in \Omega$. Trong trường hợp đặc biệt Ω là hình cầu tâm tại x ta có chuẩn hóa nghiệm cơ bản.
- Nếu $\operatorname{supp} u$ là tập compact trong Ω thì
$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)dy.$$

1.1.2 Hàm Green

Trong mục này ta cũng xét miền Ω như mục trước. Với mỗi $x \in \Omega$ cố định xét bài toán

$$\begin{aligned} \Delta u =& 0 \text{ trong } \Omega, \\ u(y) =& \Gamma(x-y), y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Trong mục này ta chưa quan tâm đến việc chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán trên, ta giả sử nó có nghiệm $\Phi(x,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Ta có khái niệm hàm Green cho miền Ω được xác định bởi

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Phi(x,y), x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y.$$

Có thể thấy hàm Green $G(x,y)$ có các tính chất sau:

- $\Delta G(x,\cdot) = 0$ trong $\Omega \setminus \{x\}$.
- $G(x,\cdot) = 0$ trên $\partial\Omega$.
- $G(x,y) < 0, x, y \in \Omega, x \neq y$.
- $G(x,y) = G(y,x), x, y \in \Omega, x \neq y$.

Nhờ hàm Green, nghiệm $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson

$$\begin{aligned} \Delta u =& f \text{ trong } \Omega, \\ u\Big|_{\partial\Omega} =& \varphi, \end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\bar{\Omega})$, có biểu diễn

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \partial_{\nu_y} G(x,y) dS_y.$$

Thật vậy, sử dụng công thức Green thứ hai và đồng nhất thức Green ta có ngay đẳng thức trên. Chi tiết coi như bài tập.

1.1.3 Công thức tích phân Poisson

Trong mục này ta chỉ rõ hàm Green cho hình cầu. Từ đó ta đưa ra công thức nghiệm dạng tích phân Poisson cho bài toán biên Dirichlet trong hình cầu. Trước hết hàm Green cho hình cầu xác định qua kết quả sau:

Định lý 1.2. *Hàm Green G trong hình cầu $B_R \subset \mathbb{R}^n$ được xác định qua từng trường hợp cụ thể sau:*

- *Khi $n = 2$*
$$G(0, y) = \frac{1}{\omega_2} \left(\ln |y| - \ln R\right), y \in B_R \setminus \{0\},$$
và khi $x \in B_R \setminus \{0\}, y \in B_R \setminus \{x\}$
$$G(x, y) = \frac{1}{\omega_2} \left(\ln |y - x| - \ln \left(\frac{|x|}{R} \left|y - \frac{R^2}{|x|^2} x\right|\right)\right).$$

- *Khi $n \geq 3$*
$$G(0, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|y|^{2-n} - R^{2-n}\right), y \in B_R \setminus \{0\},$$
và $x \in B_R \setminus \{0\}, y \in B_R \setminus \{x\}$
$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|y - x|^{2-n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \left|y - \frac{R^2}{|x|^2} x\right|^{2-n}\right).$$

Chứng minh. Nhắc lại định nghĩa hàm Green trong B_R
$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Phi(x, y)$$
với $\Phi(x, \cdot), x \in B_R$, là nghiệm của bài toán
$$\begin{aligned} \Delta\Phi(x, \cdot) =& 0 \text{ trong } B_R, \\ \Phi(x, y) =& \Gamma(x - y), y \in \partial B_R. \end{aligned}$$
Chú ý $\Gamma(x - y)$ chỉ phụ thuộc $|x - y|$ nên khi $x = 0, y \in \partial B_R$ hàm $\Gamma(0 - y)$ là hàm hằng, ký hiệu $\Gamma(R)$. Khi đó hàm hằng $\Gamma(R)$ là nghiệm của bài toán
$$\begin{aligned} \Delta\Phi(0, \cdot) =& 0 \text{ trong } B_R, \\ \Phi(0, y) =& \Gamma(0 - y), y \in \partial B_R. \end{aligned}$$

Ta chỉ còn phải chứng minh Định lý cho trường hợp $x \neq 0$. Ta xét phép nghịch đảo $x \mapsto X = \dfrac{R^2}{|x|^2}x$ qua mặt cầu ∂B_R. Khi đó $X \notin B_R$ và $X \neq y$. Do đó hàm $\Gamma(y - X)$ là hàm điều hòa trong B_R. Ta tìm nghiệm $\Phi(x, y) = \Gamma(C(x)(y - X))$ và ta cần tìm $C(x)$ nhờ điều kiện biên

$$\Phi(x, y) = \Gamma(C(x)(y - X) = \Gamma(x - y), y \in \partial B_R.$$

Để ý

$$\frac{|X|}{R} = \frac{R}{|x|}$$

nên với $y \in \partial B_R$ có $\Delta Oxy \sim \Delta OyX$. Do đó

$$\frac{|y - X|}{R} = \frac{|x - y|}{|x|}, y \in \partial B_R.$$

Như vậy để có điều kiện biên $C(x) = R/|x|$ hay ta có điều phải chứng minh. □

Với G là hàm Green trong hình cầu B_R, bằng tính toán cụ thể

$$\partial_{\nu_y} G(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R|x - y|^n \omega_n}, x \in B_R, y \in \partial B_R.$$

Hàm này được gọi là nhân Poisson, ký hiệu $K(x, y)$. Một số tính chất của nhân Poisson được thể hiện qua bổ đề sau:

Bổ đề 1.3. *(i)* $K \in C^\infty(B_R \times \partial B_R)$.

(ii) $K(x, y) > 0, x \in B_R, y \in \partial B_R$.

(iii) Với mỗi $x_0 \in \partial B_R, \delta > 0$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| < R}} K(x, y) = 0 \text{ đều theo } y \in \partial B_R \setminus B_\delta(x_0).$$

(iv) $\Delta_x K(x, y) = 0, x \in B_R, y \in \partial B_R$.

(v) $\int_{B_R} K(x, y) dS_y = 1, x \in B_R$.

Chứng minh. Các tính chất (i)-(iv) khá hiển nhiên. Tính chất (v) dễ dàng có bằng một trong hai cách

- $K(x,y) = \partial_{\nu_y}(\Gamma(x-y) - \Phi(x,y)), \Phi(x,\cdot)$ là hàm điều hòa nên từ hệ quả của các công thức Green và đồng nhất thức Green ta có (v);
- dùng biểu diễn dùng hàm Green của hàm $u \equiv 1$ ta cũng sẽ có (v).

□

Đến đây ta có lời giải cho bài toán biên Dirichlet trong hình cầu sau:

Định lý 1.4. *Với bất kỳ $\varphi \in C(\partial B_R)$ công thức tích phân Poisson*

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\varphi(y)dS_y$$

cho ta nghiệm của bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ trong } B_R,$$
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_R}} u(x) = \varphi(x_0), x_0 \in \partial B_R.$$

Chứng minh. Để chứng minh u khả vi vô hạn và điều hòa trong B_R, ta chỉ cần xét một cách địa phương tại từng $x \in B_R$. Khi đó có $r = \dfrac{R+|x|}{2}$ sao cho $x \in B_r \subset B_R$. Khi đó nhờ tính chất (i) và (iv) của nhân Poisson K ta có u khả vi vô hạn và điều hòa tại $x \in B_R$.
Ta còn phải chứng minh với mỗi $x_0 \in \partial B_R$ có

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_R}} \int_{\partial B_R} K(x,y)\varphi(y)dy - \varphi(x_0) = 0.$$

Nhờ tính chất (v) của nhân Poisson K, phần còn phải chứng minh

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_R}} \int_{\partial B_R} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dy = 0.$$

Tách tích phân trên thành hai phần

- $\int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính liên tục của φ, tính chất (ii) và (v) của K;
- $\int_{\partial B_R \setminus B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính bị chặn của φ, tính chất (iii) của K.

Chi tiết phần này xem như bài tập. □

Một số hệ quả từ công thức tích phân Poisson:

- Khi $n = 2$, chuyển sang hệ tọa độ cực $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $y = (R\cos\eta, R\sin\eta)$ thì nhân Poisson trong hình tròn B_R

$$K(r,\theta,\eta) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\eta) + r^2}.$$

- Khi $x = 0$ ta có công thức giá trị trung bình cho hàm điều hòa trên mặt cầu

$$u(0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B_R} u(y)dS.$$

- Từ tính chất (ii) và (v) của nhân Poisson ta có nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa

$$\min_{\partial B_R}\varphi \le u(x) \le \max_{\partial B_R}\varphi, x \in B_R.$$

1.1.4 Tính chính quy

Trong mục này ta sẽ quan tâm đến tính trơn của hàm điều hòa. Ta bắt đầu bằng cách sử dụng đồng nhất thức Green.

Định lý 1.5. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và $u \in C^2(\Omega)$ là hàm điều hòa trong Ω. Khi đó $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh u khả vi vô hạn tại bất kỳ $x \in \Omega$. Do Ω là tập mở nên có hình cầu đóng $\bar{B}_{2r}(x) \subset \Omega$. Từ giả thiết ta có $u \in C^2(\bar{B}_{2r}(x))$. Sử dụng đồng nhất thức Green cho u trong hình cầu $B_{2r}(x)$, với chú ý $\Delta u = 0$ trong $B_{2r}(x)$ ta có

$$u(y) = \int_{\partial B_{2r}(x)} \left(u(z)\partial_{\nu_z}\Gamma(y-z) - \Gamma(y-z)\partial_{\nu_z}u(z)\right) dS_z, y \in B_r(x).$$

Do $|y - z| \ge r$ khi $y \in B_r(x), z \in \partial B_{2r}(x)$ nên $\Gamma(\cdot - z) \in C^\infty(B_r(x))$, $z \in \partial B_{2r}(x)$. Như vậy $u \in C^\infty(B_r(x))$ hay u khả vi vô hạn tại x. Ta hoàn thành chứng minh. □

Định lý trên cho thấy một hàm $u \in C^2(\Omega)$ chỉ cần thỏa mãn đẳng thức $\Delta u = 0$ trong Ω thì nó sẽ trơn, nghĩa là khả vi vô hạn. Sau này ta còn chứng minh kết quả tốt hơn, thay vì $\Delta u = 0$ ta chỉ cần Δu trơn trong Ω ta vẫn có kết quả trên. Tính chất này

được gọi là tính hypoelliptic của toán tử Laplace. Ngoài toán tử Laplace Δ còn nhiều toán tử vi phân khác cũng có tính chất này, chẳng hạn toán tử truyền nhiệt $\partial_t - \Delta_x$. Toán tử truyền sóng $\partial_{tt} - \Delta_x$ không chia sẻ tính chất này.
Hàm điều hòa không chỉ trơn như kết quả trên chỉ ra, nó còn giải tích nghĩa là chuỗi Taylor tại mỗi điểm của nó hội tụ trong lân cận nào đó của điểm đó. Để chứng minh điều này ta cần đến đánh giá gradient sau:

Định lý 1.6 (Đánh giá gradient)**.** *Cho $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ điều hòa trong $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|$$

với hằng số C chỉ phụ thuộc vào n.

Chứng minh. Bằng cách dịch chuyển và co dãn $v(x) = u(R(x - x_0))$ ta có thể giả sử $x_0 = 0, R = 1$.
Chọn $\varphi \in C^\infty(B_{3/4})$ sao cho $\varphi = 1$ trong $B_{1/2}$. Lấy $x \in B_{1/4}$ và $r < 1/4$ có $\bar{B}_r(x) \subset B_{1/2}$.
Sử dụng công thức Green thứ hai cho $v = u, \omega = \varphi(\cdot)\Gamma(x - \cdot)$ và $\Omega = B_R \setminus \bar{B}_r(x), 3/4 < R < 1$, ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_R \setminus \bar{B}_r(x)} (u(y)\Delta_y(\varphi(y)\Gamma(x-y)) - \varphi(y)\Gamma(x-y)\Delta_y u(y))dy = \\
&\quad = \int\limits_{\partial B_R} (u(y)\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y)) - \varphi(y)\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y} u(y))dS_y + \\
&\quad + \int\limits_{\partial B_r(x)} (u(y)\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y)) - \varphi(y)\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y} u(y))dS_y \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

trong đó ν_y là pháp tuyến ngoài đơn vị trên $\partial B_R \cup \partial B_r(x)$.
Để ý rằng:

- do $3/4 < R < 1$ và $\varphi(y) = 0, |y| \geq 3/4$ nên

  $$\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y)) = 0, \varphi(y) = 0 \text{ khi } |y| = R$$

  do đó

  $$\int_{\partial B_R} (u(y)\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y)) - \varphi(y)\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y} u(y))dS_y = 0$$

- do $\bar{B}_r(x) \subset B_{1/2}$ và $\varphi(y) = 1, |y| \leq 1/2$ nên

$$\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y)) = \partial_{\nu_y}\Gamma(x-y) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}, \varphi(y) = 1 \text{ khi } |y-x| = r$$

do đó

$$\int\limits_{\partial B_r(x)} (u(y)\partial_{\nu_y}(\varphi(y)\Gamma(x-y))dS_y = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y$$

$$\int_{\partial B_r(x)} \varphi(y)\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y))dS_y = \int_{\partial B_r(x)} \Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)dS_y,$$

- $\Delta u = 0$ trong B_1 còn

$$\Delta(\varphi(\cdot)\Gamma(x-\cdot)) = \Gamma(x-\cdot)\Delta\varphi(\cdot) + 2\nabla\varphi(\cdot)\cdot\nabla\Gamma(x-\cdot) + \varphi(\cdot)\Delta\Gamma(x-\cdot)$$

mà $\nabla\varphi = 0$ ngoài $\{y : 1/2 < |y| < 3/4\}$ và $\Delta\Gamma(x-\cdot) = 0$ ngoài $B_r(x)$ nên

$$\Delta(\varphi(\cdot)\Gamma(x-\cdot)) = 0 \text{ ngoài } \{y : 1/2 < |y| < 3/4\}.$$

Thay vào (1.1) ta được

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{1/2<|y|<3/4} u(y)(\Gamma(x-y)\Delta_y\varphi(y) + 2\nabla_y\varphi(y)\cdot\nabla_y\Gamma(x-y))dy = \\ &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y - \int\limits_{\partial B_r(x)} \Gamma(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)dS_y. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tương tự như chứng minh đồng nhất thức Green, cho $r \to 0_+$ hai vế (1.2) có, khi $x \in B_{1/4}$,

$$u(x) = -\int\limits_{1/2<|y|<3/4} u(y)(\Gamma(x-y)\Delta_y\varphi(y) + 2\nabla_y\varphi(y)\cdot\nabla_y\Gamma(x-y))dy. \tag{1.3}$$

Các hàm dưới dấu tích phân trong (1.3) đều trơn trong $\{y : \ 1/2 \leq |y| \leq 3/4\}$ nên bằng cách lấy đạo hàm hai vế và đánh giá một chút ta có đánh giá gradient cần chứng minh. □

Sử dụng đánh giá gradient trên ta có đánh giá cho đạo hàm riêng cấp cao sau:

Định lý 1.7. *Cho $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ điều hòa trong $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó với mỗi đa chỉ số $\alpha, |\alpha| = m$, có*

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc n.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m. Với $m = 1$ ta có ngay đánh giá cần chứng minh nhờ đánh giá gradient.
Giả sử ta có đánh giá cần chứng minh cho các đạo hàm riêng cấp $\alpha, |\alpha| \leq m$. Ta sẽ chứng minh đánh giá cho đạo hàm riêng cấp α, $|\alpha| = m + 1$. Có $\partial^\alpha u, |\alpha| = m + 1$, là đạo hàm riêng cấp 1, theo biến nào đó, của v là đạo hàm riêng cấp $\beta, |\beta| = m$, của u. Lấy $\theta = m/(m + 1)$. Chú ý các đạo hàm riêng mọi cấp của hàm điều hòa đều là hàm điều hòa nên sử dụng đánh giá gradient cho v trong $B_{(1-\theta)R}(x_0)$ ta có

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{C}{(1-\theta)R} \max_{\bar{B}_{(1-\theta)R}(x_0)} |v|$$

nên

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C}{(1-\theta)R} \max_{\bar{B}_{(1-\theta)R}(x_0)} |v| \tag{1.4}$$

với hằng số C chỉ phụ thuộc n, như trong đánh giá gradient.
Từ giả thiết quy nạp cho $v = \partial^\beta u, |\beta| = m$, trong $B_{\theta R}(x) \subset B_R(x_0)$, $x \in \bar{B}_{(1-\theta)R}(x_0)$, ta có

$$|v(x)| \leq \frac{C^m e^{m-1} m!}{(\theta R)^m} \max_{\bar{B}_{\theta R}(x)} |v|, x \in \bar{B}_{(1-\theta)R}(x_0) \tag{1.5}$$

với hằng số C chỉ phụ thuộc n, như trong đánh giá gradient.
Chú ý rằng các hằng số C là một và $(1 + 1/m)^m < e$, kết hợp (1.4)-(1.5) ta có đánh giá cần chứng minh. □

Trước khi đến với việc chứng minh tính giải tích của hàm điều hòa, ta đến với hệ quả về tính Heine-Borel của không gian các hàm điều hòa $H(\Omega)$ trong tô-pô hội tụ trên từng compact, nghĩa là mọi tập bị chặn các hàm điều hòa đều có dãy con hội tụ theo tô-pô này đến hàm điều hòa. Tiện đây ta nói qua về không gian $\mathcal{E}(\Omega)$ là không gian gồm các hàm khả vi vô hạn $C^\infty(\Omega)$ với khái niệm hội tụ:

Dãy $u_k \in \mathcal{E}(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ được gọi là hội tụ đến $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega'} |\partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u| = 0, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \bar{\Omega}' \text{ là tập compact trong } \Omega.$$

Từ kết quả về tính trơn của hàm điều hòa có $H(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Tô-pô hội tụ trên từng compact trong $H(\Omega)$, nói ở trên, chính là tô-pô sinh ra từ sự hội tụ trong $\mathcal{E}(\Omega)$. Ta phát biểu tính Heine-Borel của $H(\Omega)$ như sau:

Hệ quả 1.8. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n, M > 0$ và dãy các hàm điều hòa $u_k \in H(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ thỏa mãn*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq M, k = 1, 2, \ldots.$$

Khi đó có hàm điều hòa $u \in H(\Omega)$ và dãy con của dãy đã cho $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ sao cho

$$u_{k_m} \to u \text{ trong } \mathcal{E}.$$

Chứng minh. Trước hết ta phân tích

$$\Omega = \cup_{j=1}^\infty \Omega_j, \Omega_j = \{x \in \Omega : \ |x| < j, d(x, \partial\Omega) > 1/j\}.$$

Khi đó $\bar{\Omega}_j \subset \Omega$ là tập compact. Khi đó sự hội tụ trong $\mathcal{E}(\Omega)$ tương đương với

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega_j} \sum_{|\alpha|=0}^{j} |\partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u| = 0, j \in \mathbb{N}.$$

Từ đánh giá cho các đạo hàm riêng mọi cấp cho hàm điều hòa và giả thiết về tính bị chặn của dãy hàm điều hòa đã cho có

$$|\partial^\alpha u_k(x)| \leq C_j j^j M = M_j, |\alpha| \leq j, x \in \bar{\Omega}_j.$$

Sử dụng Định lý Arzela-Ascoli từng bước:

B1: $j = 1$, có dãy con $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ hội tụ đều đến u trong Ω_1, ta ký hiệu lại dãy này $u_l^{(1)} = u_{k_l}, l = 1, 2, \ldots.$

B2: $j = 2$, có dãy con của dãy con trên $\{u_{k_l}^{(1)}\}_{l=1}^\infty$ hội tụ đến hàm u, xác định ở B1, theo chuẩn $||\cdot||_{C^1}$ trong Ω_2, nghĩa là

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{\Omega_2} \left(|u_{k_l}^{(1)} - u| + \sum_{m=1}^{n} |\partial_{x_m} u_{k_l}^{(1)} - \partial_{x_m} u| \right) = 0,$$

ký hiệu lại dãy này $u_l^{(2)} = u_{k_l}^{(1)}, l = 1, 2, \ldots.$

- cứ như vậy ta có các dãy $u_l^{(m)}$ hội tụ đến hàm u, xác định ở B1, theo chuẩn $||\cdot||_{C^{m-1}}$ trong Ω_m, nghĩa là

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\Omega_m}\sum_{|\alpha|=0}^{m-1}|\partial^\alpha u_k-\partial^\alpha u|=0.$$

Bằng cách lấy đường chéo ta thu được dãy con, ký hiệu $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$, hội tụ đến hàm u trong $\mathcal{E}(\Omega)$. Từ đây không khó để thấy từ tính điều hòa của u_{k_m} ta có ngay tính điều hòa của u. Ta hoàn thành chứng minh. □

Ta đến tính giải tích của hàm điều hòa:

Định lý 1.9. *Hàm điều hòa u trên miền Ω là hàm giải tích trên Ω, nghĩa là với mỗi $x_0\in\Omega$ có hình cầu $B_r(x_0)\subset\Omega$ mà chuỗi Taylor của u tại x_0*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

hội tụ đến $u(x)$ tại mọi điểm $x\in B_r(x_0)$.

Chứng minh. Đặt $h=x-x_0$, ta có phần dư dạng Lagrange

$$\begin{aligned}R_m(h)&=u(x_0+h)-\sum_{|\alpha|=0}^{m-1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha\\&=\frac{1}{m!}\left[(h_1\partial_{x_1}+\cdots h_n\partial_{x_n})^m u\right](x_0+\theta h)\end{aligned}$$

với $\theta\in(0,1)$. Do $x_0\Omega,\Omega$ mở nên có $r_0>0$ để $\bar{B}_{2r_0}(x_0)\in\Omega$. Ta có đánh giá cho các đạo hàm riêng mọi cấp cho hàm điều hòa u trong $\bar{B}_{r_0}(x_0+\theta h),|h|<r_0$, có

$$|\partial^\alpha u(x_0+\theta h)|\le\frac{C^m e^{m-1}m!}{r^m}\max_{\bar{B}_{2r_0}(x_0)}|u|,|\alpha|=m.$$

Khi đó phần dư Lagrange

$$|R_m(h)|\le\frac{C^m e^{m-1}|h|^m}{r_0^m}\max_{\bar{B}_{2r_0}(x_0)}|u|.$$

Chọn $r=\dfrac{r_0}{2Ce}$ cho $m\to\infty$ ta có điều phải chứng minh. □

1.2 Tính chất giá trị trung bình

Từ công thức tích phân Poisson ta có tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu cho hàm điều hòa, nghĩa là giá trị trung bình của hàm điều hòa trên mặt cầu bằng giá trị của nó tại tâm mặt cầu. Trong phần này ta sẽ thấy tính chất giá trị trung bình là đặc trưng của hàm điều hòa. Sau đó ta dùng tính chất trung bình này để chỉ ra một số tính chất khác của hàm điều hòa.

1.2.1 Đặc trưng của hàm điều hòa

Định nghĩa 1.1. Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và hàm $u \in C(\Omega)$.

(i) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y.$$

(ii) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trong hình cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) dS_y.$$

Để ý rằng

$$\int_{B_r(x)} u(y)dy = \int_0^r dt \int_{\partial B_t(x)} u(y)dS_y$$

ta có

- tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu suy ra tính chất giá trị trung bình trong hình cầu nhờ việc lấy nguyên hàm,
- tính chất giá trị trung bình trong hình cầu suy ra tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu nhờ việc lấy đạo hàm.

Như vậy các tính chất giá trị trung bình (i) và (ii) tương đương nhau. Ngoài ra, bằng cách đổi biến ta có thể viết lại định nghĩa các tính chất giá trị trụng bình cho hàm liên tục u trên Ω như sau:

(i) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} u(x + ry) dS_y.$$

(ii) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trong hình cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1} u(x + ry) dS_y.$$

Như đầu mục đã nói, hàm điều hòa trong miền Ω có tính chất trung bình. Tiếp theo đây ta sẽ chứng minh hàm liên tục u trên Ω có tính chất trung bình thì nó sẽ là hàm điều hòa. Điều thú vị:

- hàm điều hòa trên Ω, về mặt định nghĩa ta chỉ đòi hỏi nó khả vi liên tục đến cấp 2, là hàm giải tích trên Ω,
- hàm thỏa mãn giá trị trung bình trên Ω, về mặt định nghĩa ta chỉ đói hỏi nó liên tục, là hàm điều hòa trên Ω.

Định lý 1.10. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và u là hàm xác định trên Ω.*

(i) Nếu $u \in C^2(\Omega)$ là hàm điều hòa trong Ω thì nó thỏa mãn các tính chất giá trị trung bình trên Ω.

(ii) Nếu $u \in C(\Omega)$ thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trên Ω thì nó là hàm điều hòa trên Ω.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh (i) bằng cách không dùng công thức tích phân Poisson. Lấy $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Lấy $u \in C^2(\Omega), \rho \in (0, r)$. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) dy &= \int_{\partial B_\rho(x)} \partial_\nu u(y) dS_y \quad \text{(công thức Green thứ nhất)} \\
&= \rho^{n-1} \int_{\partial B_1} \partial_\rho u(x + \rho\omega) dS_\omega \quad \text{(đổi biến } y = x + \rho\omega) \\
&= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B_1} u(x + \rho\omega) dS_\omega \qquad (1.6) \\
&\quad \text{(chuyển đạo hàm ra ngoài dấu tích phân).}
\end{aligned}$$

(i) Từ giả thiết $u \in C^2(\Omega)$ là hàm điều hòa và (1.6) ta có

$$I(\rho) = \int_{\partial B_1} u(x + \rho\omega) dS_\omega$$

là hàm hằng. Khi đó

$$\int_{\partial B_1} u(x + \rho\omega) dS_\omega = I(0) = \omega_n u(x).$$

Điều này đúng với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$ nên u thỏa mãn tính chất trung bình.
(ii) Để chứng minh u là hàm điều hòa, từ (1.6) ta chỉ cần chứng minh $u \in C^\infty(\Omega)$ hay rõ hơn:
tại mỗi $x \in \Omega$ ta sẽ chỉ ra hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$ mà $u \in C^\infty(B_r(x))$.
Để làm điều này ta lấy hàm $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ xác định bởi

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{khi } |x| < 1, \\ 0 & \text{khi } |x| \geq 1, \end{cases}$$

với hằng số C để $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.
Cố định $x \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_{2r}(x) \subset \Omega$. Với mỗi $\epsilon \in (0, r)$ xét hàm

$$u_\epsilon(z) = \epsilon^{-n} \int_\Omega u(y)\rho\left(\frac{z-y}{\epsilon}\right) dy.$$

Có $\operatorname{supp} \rho(\frac{z-\cdot}{\epsilon}) \subset B_\epsilon(z) \subset B_{2r}(x)$ khi $z \in B_r(x)$ nên ta có các kết luận sau:

- $$u_\epsilon(z) = \epsilon^{-n} \int_{B_{2r}(x)} u(y)\rho\left(\frac{z-y}{\epsilon}\right) dy, z \in B_r(x).$$

  Lại do $u \in C(\Omega), \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nên $u_\epsilon \in C^\infty(B_r(x))$.

- Ngoài ra, khi $z \in B_r(x)$ có

$$\begin{aligned} u_\epsilon(z) =& \epsilon^{-n} \int_{B_\epsilon(z)} u(y)\rho\left(\frac{z-y}{\epsilon}\right) dy \\ =& \int_{B_1} u(z + \epsilon y)\rho(y)dy \\ =& \int_0^1 Ce^{-\frac{1}{t^2-1}} dt \int_{\partial B_t} u(z + \epsilon\omega) dS_\omega \\ =& u(z) \int_{B_1} \rho(y)dy \\ =& u(z). \end{aligned}$$

Tóm lại ta đã hoàn thành chứng minh. □

1.2.2 Ứng dụng của tính chất giá trị trung bình

Ta đã chứng minh đánh giá gradient bằng cách dùng công thức Green trong Định lý 1.6. Dưới đây ta sẽ chứng minh đánh giá gradient bằng cách dùng tính chất giá trị trung bình.

Định lý 1.11 (Đánh giá gradient)**.** *Giả sử $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ điều hòa trong $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\bar{B}_R(x_0)} |u|.$$

Chứng minh. Lấy $r \in (0, R)$, có $u \in C^2(\bar{B}_r(x_0))$ nên sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_{B_r(x_0)} u_{x_i}(x)dx = \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\nu_i(x)dS_x, i = 1, \ldots, n,$$

trong đó $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ là pháp tuyến ngoài đơn vị của $\partial B_r(x_0)$ tại $x \in \partial B_r(x_0)$.

Lại do u điều hòa trong $B_R(x_0)$ nên $u_{x_i}, i = 1, \ldots, n$, là các hàm điều hòa trong $B_R(x_0)$. Khi đó, từ tính chất giá trị trung bình ta có

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u_{x_i}(x)dx = \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\nu_i(x)dS_x.$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$|u_{x_i}(x_0)|^2 \leq \frac{n^2}{r^{2n}\omega_n^2} \left(\int_{\partial B_r(x_0)} |u(x)|dS_x \right) \left(\int_{\partial B_r(x_0)} |u(x)|\nu_i^2(x)dS_x \right)$$

Như vậy ta có

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} |u(x)|dS_x \leq \frac{n}{r} \max_{\bar{B}_r(x_0)} |u|, 0 < r < R.$$

Do hàm $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ nên ánh xạ $r \mapsto \dfrac{n}{r} \max\limits_{\bar{B}_r(x_0)} |u|$ là hàm liên tục. Khi đó cho $r \to R^-$ ta có đánh giá gradient cần chứng minh. □

Với hàm điều hòa không âm, chứng minh tương tự trên ta có bất đẳng thức Harnack dạng vi phân sau:

Định lý 1.12. *Cho $u \in C(\bar{B}_R(x_0))$ là hàm điều hòa, không âm trong $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0).$$

Từ bất đẳng thức Harnack dạng vi phân trên ta dẫn đến Định lý Liouville cho hàm điều hòa trên toàn không gian.

Hệ quả 1.13 (Định lý Liouville)**.** *Hàm điều hòa bị chặn dưới (hoặc bị chặn trên) trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$ là hàm hằng.*

Chứng minh. Từ bất đẳng thức Harnack dạng vi phân ta có

$$\nabla u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả khác dẫn ra từ bất đẳng thức Harnack dạng vi phân là bất đẳng thức Harnack sau:

Hệ quả 1.14. *Cho u là hàm điều hòa không âm trong $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó*

$$u(x) \leq Cu(y), x, y \in B_{R/2}(x_0),$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc n.

Chứng minh. Lấy $\epsilon > 0$, đặt $v_\epsilon = u + \epsilon$ có

$$v_\epsilon(x) \geq \epsilon > 0, \Delta v_\epsilon(x) = 0 \text{ khi } x \in B_R(x_0).$$

Từ bất đẳng thức Harnack dạng vi phân cho v_ϵ trong $B_{R/2}(x)$, $x \in B_{R/2}(x_0)$, có

$$\left| \frac{\nabla v_\epsilon(x)}{v_\epsilon(x)} \right| \leq \frac{2n}{R}. \tag{1.7}$$

Lấy $x, y \in B_{R/2}(x_0)$ có

$$\begin{aligned} \ln \frac{v_\epsilon(x)}{v_\epsilon(y)} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \ln v_\epsilon(tx + (1-t)y) dt \\ &= (x-y) \cdot \int_0^1 \nabla \ln v_\epsilon(tx + (1-t)y) dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Do $tx - (1-t)y \in B_{R/2}(x_0)$ và $|x-y| < R$ khi $t \in [0,1]$, $x, y \in B_{R/2}(x_0)$ nên từ (1.7)-(1.8) ta có

$$\begin{aligned}\ln \frac{v_\epsilon(x)}{v_\epsilon(y)} \leq & |x-y| \int_0^1 |\nabla \ln v_\epsilon(tx + (1-t)y)| dt \\ \leq & \frac{2n}{R}|x-y| < 2n.\end{aligned}$$

Với $C = e^{2n}$ và $\epsilon \to 0^+$ ta có bất đẳng thức Harnack. □

Cách khác chứng minh bất đẳng thức Harnack dùng trực tiếp tính chất giá trị trung bình như sau:

Chứng minh khác bất đẳng thức Harnack. Trước hết ta chứng minh kết luận sau: Với bất kỳ $\bar{x} \in B_R(x_0), r > 0$ sao cho $B_{4r}(\bar{x}) \subset B_R(x_0)$ ta đều có

$$u(x) \leq 3^n u(y), x, y \in B_r(\bar{x}).$$

Điều này khá hiển nhiên vì

- $B_r(x) \subset B_{3r}(y) \subset B_{4r}(\bar{x})$,
- sử dụng công thức giá trị trung bình cho u trong các hình cầu $B_r(x), B_{3r}(y)$.

Lấy $x, y \in B_{R/2}(x_0), r = R/8$. Khi đó

- với mỗi $\bar{x} \in [x,y] = \{tx + (1-t)y : \ 0 \leq t \leq 1\}$ có
$$B_{4r}(\bar{x}) \subset B_R(x_0),$$
- đặt $P_k = \dfrac{1}{5}(kx + (5-k)y), k = 0, 1, \ldots, 5$, do $|x-y| < R$ ta có $P_0 = x, P_5 = y$, còn mỗi cặp điểm P_k, P_{k+1} cùng nằm trong một hình cầu $B_r(Q_k), Q_k = \dfrac{1}{2}(P_k + P_{k+1}) \in [x,y]$,
- theo kết luận trên ta có
$$u(x) \leq 3^n u(P_1) \leq \cdots \leq 3^{5n} u(y).$$

□

Từ công thức tích phân Poisson ta có nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa trong hình cầu. Bằng việc sử dụng tính chất giá trị trung bình ta sẽ chỉ ra nguyên lý cực đại mạnh cho hàm điều hòa trong miền bị chặn bất kỳ.

Định lý 1.15. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $u \in C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa trong Ω. Khi đó, hoặc u chỉ có thể đạt GTLN, GTNN trên biên $\partial\Omega$, hoặc u là hàm hằng. Cả hai trường hợp đều có*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, x \in \Omega.$$

Như vậy nguyên lý cực đại mạnh suy ra nguyên lý cực đại. Nói chung nguyên lý cực đại không suy ra nguyên lý cực đại mạnh vì GTLN hay GTNN có thể vừa đạt cả trên biên và bên trong.

Chứng minh. Ta sẽ chỉ chứng minh GTLN, còn GTNN chứng minh tương tự (coi như bài tập). Do $u \in C(\bar{\Omega}), \bar{\Omega}$ là tập compact nên tồn tại $M = \max_{\bar{\Omega}} u$. Xét tập

$$D = \{x \in \Omega : \ u(x) = M\}.$$

Từ tính liên tục của u nên D đóng trong Ω. Nếu ta chứng minh được thêm D là tập mở trong Ω thì từ tính liên thông của Ω ta có hai trường hợp sau:

TH1: $D = \emptyset$ nghĩa là u chỉ bằng M trên biên $\partial\Omega$.

TH2: $D = \Omega$ nghĩa là u là hàm hằng.

Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh D mở trong Ω. Lấy $x_0 \in D \subset \Omega$. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Sử dụng tính chất giá trị trung bình cho hàm điều hòa u trong $B_r(x_0)$ và $u(x_0) = M$ là GTLN của u ta có

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy \leq M.$$

Do $u(y) \leq M$ và u liên tục nên $u(y) = M, y \in B_r(x_0)$, hay $B_r(x_0) \subset D$. Từ đó D là tập mở trong Ω. Ta hoàn thành chứng minh. □

Dùng tích phân năng lượng ta đã chứng minh bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson

$$\Delta u = f \text{ trong } \Omega \tag{1.9}$$

$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{1.10}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên thuộc lớp C^1, có duy nhất nghiệm trong không gian $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.
Tiếp theo, bằng nguyên lý cực đại ta có tính duy nhất nghiệm cho bài toán (1.9)-(1.10) cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ chỉ cần là miền bị chặn, và không gian nghiệm mở rộng hơn $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Định lý 1.16. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó với bất kỳ $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega)$, bài toán* (1.9)-(1.10) *có tối đa một nghiệm trong $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

1.3 Nguyên lý cực đại

1.3.1 Nguyên lý cực đại yếu

Đầu tiên ta sẽ chứng minh nguyên lý cực đại cho hàm dưới điều hòa mà không sử dụng tính chất giá trị trung bình.

Định nghĩa 1.2. Cho $u \in C^2(\Omega), \Omega$ là miền trong $\mathbb{R}^n$. Ta nói hàm u là điều hòa dưới (điều hòa trên) trong Ω nếu

$$\Delta u \geq 0 \quad (\Delta u \leq 0, \text{ tương ứng}) \text{ trong } \Omega.$$

Định lý 1.17. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa dưới trong Ω. Khi đó u đạt GTLN trên $\partial\Omega$, nghĩa là*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Định lý này được gọi là nguyên lý cực đại yếu cho hàm điều hòa dưới. Để chứng minh nó ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề 1.18. *Cho Ω là miền trong $\mathbb{R}^n$ và $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn $\Delta u > 0$ trong Ω. Khi đó u không thể đạt cực đại địa phương trong Ω. Từ đó ta có, nếu u liên tục trên $\bar{\Omega}$ thì*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Chứng minh Bổ đề 1.18. Ta chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là giả sử có điểm x_0 mà u đạt cực đại địa phương tại đó. Khi đó

$$u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Do đó $\Delta u(x_0) \leq 0$ hay ta có điều mâu thuẫn với giả thiết. Vậy điều giả sử sai hay ta đã chứng minh xong Bổ đề. $\square$

Quay trở lại chứng minh nguyên lý cực đại yếu cho hàm điều hòa dưới:

Chứng minh nguyên lý cực đại yếu. Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ để $\bar{\Omega} \subset B_R$. Với mỗi $\epsilon > 0$ xét

$$u_\epsilon(x) = u(x) - \epsilon(R^2 - |x|^2).$$

Có $u_\epsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và

$$\Delta u_\epsilon = \Delta u + 2n\epsilon > 0 \text{ trong } \Omega.$$

Do đó theo Bổ đề 1.18 ta có

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\epsilon = \max_{\partial\Omega} u_\epsilon.$$

Lại do $\bar{\Omega} \subset B_R$ nên

- $\max\limits_{\bar{\Omega}} u_\epsilon \geq \max\limits_{\bar{\Omega}} u - \epsilon R^2$,
- $\max\limits_{\partial\Omega} u_\epsilon \leq \max\limits_{\partial\Omega} u$.

Từ trên, cho $\epsilon \to 0^+$ ta hoàn thành chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta quan tâm nguyên lý cực đại yếu cho lớp phương trình rộng hơn một chút so với phương trình Poisson, cụ thể

$$\Delta u + cu = f \text{ trong } \Omega,$$

với c, f là các hàm liên tục trên Ω. Ta đến với các khái niệm nghiệm trên, nghiệm dưới như sau:

Định nghĩa 1.3. Hàm $u \in C^2(\Omega)$ được gọi là nghiệm dưới (nghiệm trên) nếu

$$\Delta u + cu \geq f \quad (\Delta u + cu \leq f, \text{ tương ứng}) \text{ trong } \Omega.$$

Ký hiệu phần dương $u^+ = \max\{u, 0\}$. Ta có nguyên lý cực đại yếu cho nghiệm dưới sau:

Định lý 1.19. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ trong } \Omega.$$

Khi đó u đạt GTLN không âm trên $\partial\Omega$, nghĩa là

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Chứng minh. Do $u \in C(\bar{\Omega}), \bar{\Omega}$ là tập compact nên có $x_0 \in \bar{\Omega}$ để $u(x_0) = \max\limits_{\bar{\Omega}} u$.
TH1: hoặc $x_0 \in \partial\Omega$ hoặc $u(x_0) \leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.
TH2: $x_0 \in \Omega$ và $u(x_0) > 0$. Đặt $\Omega_+ = \{x \in \Omega : \ u(x) > 0\}$ có:

- Do $c \leq 0$ trong Ω nên

  $$\Delta u \geq \Delta u + cu \geq 0 \text{ trong } \Omega_+.$$

  Do đó theo Định lý 1.17 ta có

  $$\max_{\bar{\Omega}_+} u \leq \max_{\partial\Omega_+} u.$$

- Nếu $x \in \partial\Omega_+ \cap \Omega$ thì $u(x) = 0$. Do đó

  $$\max_{\partial\Omega_+} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

- $\bar{\Omega}_+ \subset \bar{\Omega}$ nên từ trên ta có điều phải chứng minh.

□

Các nguyên lý cực đại yếu ở trên ta đều có thể mở rộng bằng cách thay toán tử Laplace Δ bởi toán tử elliptic

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i},$$

với $a_{ij}, b_i \in C(\bar{\Omega})$ và ma trận $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ xác định dương đều, nghĩa là có hằng số dương λ để

$$\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Để chứng minh các mở rộng này ta dùng

- nếu u đạt cực đại địa phương tại x_0 thì ma trận Hessian tại x_0

$$(\partial^2_{x_i x_j} u(x_0))_{1\le i,j\le n} \text{ nửa xác định âm,}$$

- nếu A, B là các ma trận vuông cấp n và đều nửa xác định dương thì $Tr(AB) \ge 0$.

Ta không đi vào chi tiết các mở rộng này mà chuyển sang các hệ quả của các nguyên lý cực đại yếu.

Hệ quả 1.20. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \ge 0 \text{ trong } \Omega,$$
$$u \le 0 \text{ trên } \partial\Omega.$$

Khi đó $u \le 0$ trong Ω.

Tổng quát hơn ta có nguyên lý so sánh sau:

Hệ quả 1.21. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Giả sử $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \ge \Delta v + cv \text{ trong } \Omega,$$
$$u \le v \text{ trên } \partial\Omega.$$

Khi đó $u \le v$ trong Ω.

Hệ quả trên giải thích lý do tại sao lại gọi hàm $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn $\Delta u + cu \ge f$ là nghiệm dưới.
Giống như bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson, nguyên lý cực đại yếu dẫn đến tính duy nhất nghiệm của bài toán biên Dirichlet cho phương trình

$$\Delta u + cu = f.$$

Định lý 1.22. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Khi đó bài toán*

$$\Delta u + cu = f \text{ trong } \Omega,$$
$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega.$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega)$, có tối đa một nghiệm trong $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Tiếp theo ta đưa ra một số ví dụ khi hoặc Ω không bị chặn, hoặc c là hàm dương thì nguyên lý cực đại yếu hay tính duy nhất nghiệm bị phá vỡ.

Ví dụ 1.1. Với $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1$ là miền không bị chặn, bài toán

$$\Delta u = 0 \text{ ngoài } \bar{B}_1,$$
$$u = 0 \text{ trên } \partial B_1$$

có nghiệm không tầm thường

$$u(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{khi } n = 2, \\ |x|^{2-n} - 1 & \text{khi } n \geq 3. \end{cases}$$

Có thể thấy rằng các nghiệm này không thỏa mãn nguyên lý cực đại vì nghiệm $|u(x)| \to +\infty$ khi $|x| \to +\infty$.

Ví dụ 1.2. Với $\Omega = (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) \in \mathbb{R}^n$ là hình lập phương (bị chặn), và $c = n > 0$ bài toán

$$\Delta u + nu = 0 \text{ trong } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega$$

có nghiệm không tầm thường $u(x) = \prod_{j=1}^n \sin x_j$. Không khó để thấy u đạt GTLN tại $(\pi/2, \ldots, \pi/2) \in \Omega$.

1.3.2 Nguyên lý cực đại mạnh

Để chứng minh nguyên lý cực đại mạnh cho nghiệm dưới ta cần đến bổ đề Hopf. Nếu $u \in C^1(\bar{\Omega})$ đạt cực đại tại $x_0 \in \partial\Omega$ thì $\partial_\nu u(x_0) \geq 0$, với ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên $\partial\Omega$. Bổ đề Hopf chỉ ra rằng nếu u là nghiệm dưới đạo hàm theo pháp tuyến này thực sư dương.

Bổ đề 1.23 (Bổ đề Hopf)**.** *Cho hình cầu mở $B \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \partial B$. Giả sử $c \in C(\bar{B}), c \leq 0$, và $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \geq 0 \textit{ trong } B.$$

Nếu $u < u(x_0)$ trong $B \setminus \{x_0\}$ và $u(x_0) \geq 0$ thì

$$\partial_\nu u(x_0) > 0$$

với ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên ∂B.

Chứng minh. Bằng phép dịch chuyển ta có thể giả sử $B = B_R$. Xét các hàm

$$\begin{aligned}\omega(x) =& e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2},\\ v(x) =& u(x) - u(x_0) + \epsilon\omega(x),\end{aligned}$$

trong đó các hằng số dương α, ϵ sẽ chọn sau.
Do $c \in C(\bar{B})$ nên có α đủ lớn để

$$\alpha^2 R^2 - 2n\alpha - \max_{\bar{B}} |c| \geq 0.$$

Với α được chọn như vậy, và chú ý $c \leq 0$ ta có

$$\Delta\omega(x) + c\omega(x) = (4\alpha^2|x|^2 - 2n\alpha + c)e^{-\alpha|x|^2} - ce^{-\alpha R^2} \geq 0, x \in B_R \setminus \bar{B}_{R/2}.$$

Khi đó từ giả thiết $\Delta u + cu \geq 0$ và $u(x_0) \geq 0$ có

$$\Delta v + cv = \Delta u + cu + \epsilon(\Delta\omega + c\omega) - cu(x_0) \geq 0 \text{ trong } B_R \setminus \bar{B}_{R/2}.$$

Ta lại có:

- Trên ∂B_R có $\omega(x) = 0$ nên

$$v(x) = u(x) - u(x_0) \leq 0.$$

- Trên $\partial B_{R/2}$ có $u(x) - u(x_0) < 0$ nên

$$\epsilon = \max_{\partial B_{R/2}} (u(x_0) - u(x)) > 0.$$

  Khi đó

$$v(x) \leq u(x) - u(x_0) + \epsilon \leq 0, x \in \partial B_{R/2}.$$

Sử dụng nguyên lý cực đại yếu cho v ta được

$$v(x) \leq 0, x \in B_R \setminus \bar{B}_{R/2}.$$

Do $v(x_0) = 0$ nên

$$\partial_\nu v(x_0) \geq 0 \text{ hay } \partial_\nu u(x_0) \geq 2\alpha\epsilon R e^{-\alpha R^2}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ta chứng minh nguyên lý cực đại mạnh.

Định lý 1.24. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $c \in C(\Omega)$, $c \leq 0$, và $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ trong } \Omega.$$

Khi đó u hoặc chỉ có thể GTLN không âm trên $\partial\Omega$ hoặc nó là hằng số.

Chứng minh. Ký hiệu M là GTLN không âm của u trong $\bar{\Omega}$ và

$$D = \{x \in \Omega : \ u(x) = M\}.$$

Từ tính liên tục của u ta có D đóng tương đối trong Ω.
TH1: $D = \emptyset$ ta có u chỉ có thể đạt GTLN trên biên $\partial\Omega$.
TH2: $D \neq \emptyset$**,** nghĩa là có $x_1 \in D$. Giả sử có $x_2 \in \Omega \setminus D$. Do Ω liên thông nên có đường liên tục $\gamma : [0, 1] \to \Omega, \gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Lại do tính compact nên

$$d(\partial\Omega, \gamma(s)) \geq d > 0, s \in [0, 1].$$

Lại do tính compact nên có dãy $s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_N = 1$ sao cho

$$d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) < d/2, i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Có $\gamma(s_0) = x_1 \in D, \gamma(s_N) = x_2 \in \Omega \setminus D$. Do đó có $i_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ sao cho

$$\gamma(s_{i_0}) \in D, \gamma(s_{i_0+1}) \in \Omega \setminus D.$$

Lấy $x_* = \gamma(s_{i_0+1}), r = d(x_*, D)$ ta có

$$0 < r \leq d(\gamma(s_{i_0}), \gamma(s_{i_0+1})) < d/2 < d(x_*, \partial\Omega)/2.$$

Khi đó $\bar{B}_r(x_*) \subset \Omega, B_r(x_*) \cap D = \emptyset, \partial B_r(x_*) \cap D \neq \emptyset$. Lấy $x_0 \in \partial B_r(x_*) \cap D$ có

- $u(x_0) = M \geq 0, u(x) < M = u(x_0)$ khi $x \in B_r(x_*)$ nên theo Bổ đề Hopf ta có

$$\partial_\nu u(x_0) > 0$$

  với ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên $\partial B_r(x_*)$;

- $x_0 \in B_{2r}(x_*) \subset B_d(x_*) \subset \Omega$ nên x_0 là điểm cực trị của u, hay

$$\nabla u(x_0) = 0.$$

Ta có điều mâu thuẫn hay $\Omega \setminus D = \emptyset$ hay $\Omega = D$ nghĩa là u là hàm hằng.
Nguyên lý cực đại mạnh được chứng minh. □

Từ nguyên lý cực đại mạnh ta dễ dàng có hệ quả sau.

Hệ quả 1.25. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $c \in C(\Omega)$, $c \leq 0$, và $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu &\geq 0 \text{ trong } \Omega, \\ u &\leq 0 \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Khi đó hoặc $u < 0$ trong Ω hoặc nó là hằng số không dương.

Tiếp đến hệ quả về bài toán biên Neumann.

Hệ quả 1.26. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 có pháp tuyến ngoài đơn vị ν. Giả sử Ω thỏa mãn điều kiện cầu trong tại mọi điểm trên biên $\partial\Omega$ và $c \in C(\Omega), c \leq 0$. Nếu $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là nghiệm của bài toán*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu =& f \text{ trong } \Omega, \\ \partial_\nu u =& \varphi \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega)$ thì

- *hoặc u là nghiệm duy nhất của bài toán khi $c \not\equiv 0$,*
- *hoặc các nghiệm của bài toán sai khác u một hằng số khi $c \equiv 0$.*

Chứng minh. Để chứng minh hệ quả này ta sẽ chứng minh khi $f = 0$, $\varphi = 0$ có

- hoặc $u \equiv 0$ khi $c \not\equiv 0$,
- hoặc u là hằng số khi $c \equiv 0$.

TH1: $c \not\equiv 0$. Giả sử $u \not\equiv 0$, bằng cách đặt $v = -u$, không mất tính tổng quát ta giả sử u có GTLN dương trong $\bar{\Omega}$. Theo nguyên lý cực đại mạnh ta có:

- Hoặc u là hằng số dương: thì từ phương trình $c \equiv 0$, trái với giả thiết.
- Hoặc u không đạt GTLN trong Ω và có $x_0 \in \partial\Omega$ để

$$u(x_0) > 0 \text{ và } u(x) < u(x_0), x \in \Omega.$$

  Theo Bổ đề Hopf ta có $\partial_\nu u(x_0) > 0$. Lại trái với giả thiết.

Như vậy điều giả sử sai hay $u \equiv 0$.
TH2: $c \equiv 0$. Dễ thấy hằng số là nghiệm của bài toán. Giả sử có u khác hằng là nghiệm của bài toán. Bằng cách lấy $v = -u$, không mất tính tổng quát ta giả sử u có GTLN dương trong $\bar{\Omega}$. Do u khác hằng nên theo nguyên lý cực đại mạnh $x_0 \in \partial\Omega$ để

$$u(x_0) > 0 \text{ và } u(x) < u(x_0), x \in \Omega.$$

Theo Bổ đề Hopf ta có $\partial_\nu u(x_0) > 0$. Trái với giả thiết. Do đó điều giả sử sai hay chỉ có hằng mới là nghiệm của bài toán. □

1.3.3 Đánh giá tiên nghiệm

Như ta đã thấy nguyên lý cực đại chỉ ra tính duy nhất nghiệm của các bài toán biên. Bây giờ ta sẽ thấy nguyên lý cực đại còn dẫn đến đánh giá tiên nghiệm.

Định lý 1.27. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, c$ và f là các hàm liên tục trên $\bar{\Omega}$ với $c \leq 0$, còn φ liên tục trên $\partial\Omega$. Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu =& f \text{ trong } \Omega, \\ u =& \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc n và $d(\Omega)$.

Chứng minh. Đặt

$$F = \sup_{\Omega} |f|, \quad \Phi = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Khi đó

$$\Delta(\pm u) + c(\pm u) = \pm f \geq -F \text{ trong } \Omega,$$
$$\pm u = \pm \varphi \leq \Phi \text{ trên } \partial\Omega.$$

Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ để $\Omega \subset B_R$. Xét hàm

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2).$$

Có $v \geq 0$ trong B_R. Lại do $c \leq 0$ trong Ω nên

$$\Delta v + cv = -F + cv \leq -F \leq \Delta(\pm u) + c(\pm u) \text{ trong } \Omega.$$

Khi $x \in \partial\Omega \subset B_R$ có $R^2 - |x|^2 \geq 0$. Do đó

$$v \geq \Phi \geq (\pm u) \text{ trên } \partial\Omega.$$

Sử dụng nguyên lý so sánh ta có

$$|u| \leq v \text{ trong } \Omega$$

hay

$$|u(x)| \leq \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2) \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{R^2}{2n} \sup_{\Omega} |f|, x \in \Omega.$$

Vậy ta có ước lượng tiên nghiệm với $C = R^2/(2n)$. □

Trong trường hợp đặc biệt $\Omega = B_R(x_0)$ ta có ước lượng

$$\sup_{B_R(x_0)} |u| \leq \sup_{\partial B_R(x_0)} |\varphi| + \frac{R^2}{2n} \sup_{B_R(x_0)} |f|.$$

1.3.4 Đánh giá gradient

Với $u \in C^2(B_R(x)) \cap C(\bar{B}_R(x))$ là hàm điều hòa trong $B_R(x)$, Định lý 1.6, bằng cách dùng công thức Green ta có đánh giá gradient

$$\max_{\bar{B}_{R/4}(x)} |\nabla u| \leq \frac{C}{R} \max_{\bar{B}_R(x)} |u|,$$

với hằng số dương C chỉ phụ thuộc số chiều n. Định lý 1.17, bằng cách dùng tính chất trung bình có thể chỉ rõ $R = n$. Các cách này đều đưa về trường hợp $x = 0, R = 1$. Dưới đây ta trình bày cách khác, dựa trên phương pháp của N. Bernstein, để chứng minh đánh giá gradient khi $x = 0, R = 1$.

Định lý 1.28. *Cho $u \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$ là hàm điều hòa. Khi đó*

$$\max_{\bar{B}_{1/2}} |\nabla u| \leq C \max_{\partial B_1} |u|,$$

với hằng số dương C chỉ phụ thuộc số chiều n.

Chứng minh. Lấy $\eta \in C_0^\infty(B_1)$ thỏa mãn $\eta = 1$ trong $B_{1/2}$ và $\eta = 0$ ngoài B_1. Ta sẽ tìm hằng số dương α để

$$\Delta(\eta^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2) \geq 0 \text{ trong } B_1. \tag{1.11}$$

Lại có $\eta^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2 \geq 0$ trong $\bar{B}_1$, nên theo Định lý 1.19 ta có

$$\max_{\bar{B}_1}(\eta^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2) \leq \max_{\partial B_1}(\eta^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2).$$

Từ tính chất của η ta có đánh giá gradient cần chứng minh. Ta còn phải chứng minh (1.11).
Ta tính toán lần lượt như sau:

- $\Delta(\eta^2) = 2\eta\Delta\eta + 2|\nabla\eta|^2$.
- $\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2 = 2|\nabla u|^2$.
- Công thức Bochner

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2|\nabla^2 u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla(\Delta u) = 2|\nabla^2 u|^2.$$

- Với $\varphi \in C_0^\infty(B_1), \varphi \geq 0$, có

$$\Delta(\varphi|\nabla u|^2) = |\nabla u|^2\Delta\varphi + 4\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_j} u_{x_i} u_{x_i x_j} + 2\varphi|\nabla^2 u|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$\varphi u_{x_i x_j}^2 + \frac{1}{\varphi}\varphi_{x_j} u_{x_i}^2 \geq 2|\varphi_{x_j} u_{x_i} u_{x_i x_j}|$$

ta có

$$\Delta(\varphi|\nabla u|^2) \geq \left(\Delta\varphi - 2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)|\nabla u|^2.$$

- Chọn $\varphi = \eta^2$ có $|\nabla\varphi|^2/\varphi = 4|\nabla\eta|^2$. Kết hợp với các tính chất ở trên ta có

$$\Delta(\eta^2|\nabla u|^2) \geq 2(\eta\Delta\eta - 3|\nabla\eta|^2)|\nabla u|^2 \geq -C|\nabla u|^2,$$

trong đó $C = \max\limits_{\bar{B}_1} 2(|\eta\Delta\eta| + 3|\nabla\eta|^2)$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc n.

Từ các tính toán trên lấy $\alpha = C$ ta có (1.11). □

Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức Harnack dạng vi phân.

Định lý 1.29. *Cho u là hàm điều hòa dương trong B_1. Khi đó*

$$\sup_{B_{1/2}} |\nabla \ln u| \leq C,$$

với hằng số dương C chỉ phụ thuộc vào số chiều n.

Chứng minh. Đặt $v = \ln u, \omega = |\nabla v|^2$. Ta cũng lấy $\eta \in C_0^\infty(B_1)$ như trong chứng minh Định lý 1.28. Cũng gần giống chứng minh đó, ta cũng tìm hằng số dương α để

$$\Delta(\eta^4\omega) + 2\nabla v \cdot \nabla(\eta^4\omega) \geq \frac{1}{2n}\eta^4\omega - \alpha. \tag{1.12}$$

Do $\eta^4\omega \in C(\bar{B}_1)$ nên có điểm $x_0 \in \bar{B}_1$ để $\eta^4\omega$ đạt GTLN trong $\bar{B}_1$. Ta có hai trường hợp sau: **TH1:** $x_0 \in \partial B_1$ thì

$$\eta^4(x)\omega(x) \leq \eta^4(x_0)\omega(x_0) = 0, x \in B_1.$$

Lại từ tính chất của η, ω ta có

$$\omega = 0 \text{ trong } B_{1/2}$$

hay ta có đánh giá cần chứng minh với $C = 0$.

TH2: $x_0 \in B_1$ thì

$$\nabla(\eta^4\omega)(x_0) = 0, \Delta(\eta^4\omega)(x_0) \leq 0.$$

Khi đó từ (1.12) ta có

$$\eta^4(x_0)\omega^2(x_0) \leq 2n\alpha.$$

Lấy $C = \max\{2n\alpha, \eta^4(x_0)\}$ ta có

$$\eta^4(x)\omega(x) \leq \eta^4(x_0)\omega(x_0) \leq C, x \in B_1.$$

Từ tính chất của η ta có đánh giá cần chứng minh với $C = \max\{2n\alpha, \eta^4(x_0)\}$.

Ta còn phải chứng minh (1.12). Nhắc lại $v = \ln u, \omega = |\nabla v|^2$.

Ta tính toán lần lượt như sau:

- $\Delta v = \dfrac{\Delta u}{u} - |\nabla v|^2 = -\omega.$
- $\Delta\omega = 2|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla(\Delta v) = 2|\nabla^2 v|^2 - 2\nabla v \cdot \nabla\omega.$
- Với $\varphi \in C_0^\infty(B_1), \varphi \geq 0$ có

$$\Delta(\varphi\omega) = \omega\Delta\varphi + 4\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_j} v_{x_i} v_{x_i x_j} + 2\varphi|\nabla^2 v|^2 - 2\varphi\nabla v \cdot \nabla\omega$$

hay

$$\Delta(\varphi\omega) + 2\nabla v \cdot \nabla(\varphi\omega) = \omega\Delta\varphi + 4\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x_j} v_{x_i} v_{x_i x_j} + 2\varphi|\nabla^2 v|^2 - 2\omega\nabla v \cdot \nabla\varphi.$$

Sử dụng các bất đẳng thức

$$\varphi v_{x_i x_j}^2 + \frac{4\varphi_{x_j}^2}{\varphi} v_{x_i}^2 \geq 4|\varphi_{x_j} v_{x_i} v_{x_i x_j}|$$
$$|\nabla^2 v|^2 \geq \frac{1}{n}|\Delta v|^2 = \frac{|\nabla v|^4}{n},$$
$$|\omega\nabla v \cdot \nabla\varphi| \leq |\nabla\varphi| \times |\nabla v|^3$$

ta có

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\omega) &+ 2\nabla v\nabla(\varphi\omega) \geq \\ &\geq \frac{\varphi}{n}|\nabla v|^4 - 2|\nabla\varphi| \times |\nabla v|^3 + \left(\Delta\varphi - \frac{4|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right)|\nabla v|^2.\end{aligned}$$

- Chọn $\varphi = \eta^4$ có

$$|\Delta\varphi| = 12|\nabla\eta|^2\eta^2 + 4\eta\Delta\eta, \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} = 64|\nabla\eta|^2\eta^2.$$

  Kết hợp với tính toán ở trên

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi\omega)&+2\nabla v\nabla(\varphi\omega) \geq \\ &\geq \frac{\eta^4}{n}|\nabla v|^4 - 8\eta^3|\nabla\eta| \times |\nabla v|^3 + 4\eta^2\left(\eta\Delta\eta - 13|\nabla\eta|^2\right)|\nabla v|^2.\end{aligned}$$

- Do $\eta \in C_0^\infty(B_1)$ nên

$$\frac{t^4}{2n} - 8|\nabla\eta|t^3 + 4(\eta\Delta\eta - 13|\eta|^2)t^2 \geq -\alpha, t \in \mathbb{R},$$

  với hằng số dương α chỉ phụ thuộc n, η.

Kết hợp toàn bộ tính toán trên với $t = \eta^4\omega$ ta có (1.12). □

1.3.5 Khử kỳ dị

Nhắc lại nghiệm cơ bản của phương trình Laplace

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_2}\ln|x| & \text{khi } n = 2, \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{khi } n \geq 3. \end{cases}$$

Các nghiệm này thỏa mãn phương trình Laplace tại mọi điểm trừ gốc tọa độ, và chúng đều bị hút ra vô cùng ở gốc. Dưới đây ta sẽ thấy kỳ dị cô lập của hàm điều hòa có thể khử được nếu chúng tốt hơn nghiệm cơ bản tại đó.

Định lý 1.30. *Cho u là hàm điều hòa trong $B_R \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ và thỏa mãn*

$$u(x) = o(\Gamma(x)) \text{ nghĩa là } \lim_{|x|\to 0}\frac{u(x)}{\Gamma(x)} = 0.$$

Khi đó ta có để định nghĩa hàm u tại gốc để nó trở thành hàm điều hòa trong B_R.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử u liên tục đến mặt cầu B_R. Khi đó sử dụng công thức tích phân Poisson, bài toán biên Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta v =& 0 \text{ trong } B_R,\\ v =& u \text{ trên } \partial B_R\end{aligned}$$

có nghiệm v là hàm điều hòa trong B_R. Đặt $M = \max\limits_{\partial B_R} u$. Theo nguyên lý cực đại ta có

$$|v| \leq M \text{ trong } \bar{B}_R.$$

Ta chỉ còn phải chứng minh $u = v$ trong $B_R \setminus \{0\}$. Đặt $\omega = v - u$ và $M_r = \max\limits_{\partial B_r} |om|, 0 < r < R$. Do $\omega = 0$ trên B_R nên

$$-M_r \frac{\Gamma(x/R)}{\Gamma(r/R)} \leq \omega(x) \leq M_r \frac{\Gamma(x/R)}{\Gamma(r/R)} \text{ trên } \partial B_r \cup \partial B_R.$$

Lại có $\omega(x)$ và $C\Gamma(x/R)$ là các hàm điều hòa trong $B_R \setminus \bar{B}_r$ nên theo nguyên lý so sánh ta có

$$|\omega(x)| \leq M_r \frac{\Gamma(x/R)}{\Gamma(r/R)} \text{ trong } B_R \setminus \bar{B}_r.$$

Lại có

$$M_r = \max_{\partial B_r} |\omega| \leq M + \max_{\partial B_r} |u|$$

nên

$$|\omega(x)| \leq M \frac{\Gamma(x/R)}{\Gamma(r/R)} + \frac{\max_{\partial B_r} |u|}{\Gamma(r/R)} \Gamma(x/R), r < |x| < R.$$

Cố định $x \in B_R \setminus \{0\}$, lấy $r \in (0, |x|)$ và cho $r \to 0^+$ ta có điều phải chứng minh. □

1.3.6 Phương pháp Perron

Trong mục này ta xét $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$.
Trước hết ta cần đến một số kết quả về hàm điều hòa dưới và hàm điều hòa trên. Nhắc lại hàm $v \in C^2(\Omega)$ được gọi là điều hòa dưới (điều hòa trên) nếu $\Delta v \geq 0$ (tương ứng $\Delta v \leq 0$). Để giải bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trên miền bị chặn bất kỳ, Perron mở rộng khái niệm điều hòa dưới, điều hòa trên cho lớp hàm liên tục. Bổ đề su giúp ta cách mở rộng.

Bổ đề 1.31. *Cho $v \in C^2(\Omega)$. Khi đó v là hàm điều hòa dưới khi và chỉ khi*

với bất kỳ hình cầu $B \subset \Omega$, bất kỳ $\omega \in C(\bar{B})$ mà ω điều hòa trên B
nếu $v \leq \omega$ trên biên ∂B thì $v \leq \omega$ trong B.

Chứng minh. Chiều " $\Rightarrow$ " được chứng minh nhờ nguyên lý cực đại.
Ta chứng minh chiều " $\Leftarrow$ " bằng phản chứng, nghĩa là có một điểm $x_0 \in \Omega$ mà $\Delta v(x_0) < 0$. Do Ω là tập mở và $v \in C^2(\Omega)$ nên có hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$ với tâm x_0 sao cho

$$\Delta v(x) < 0, x \in B.$$

Lại có $v|_{\partial B}$ là hàm liên tục nên bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong hình cầu

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0 \text{ trong } B, \\ \omega|_{\partial B} &= v \end{aligned}$$

có duy nhất nghiệm $\omega \in C(\bar{B})$ là hàm điều hòa trong B và $\omega = v$ trên ∂B. Khi đó từ giả thiết ta có $v \leq \omega$ trong B.
Mặt khác, do $\Delta(\omega - v) > 0$ trong $B, \omega - v = 0$ trên ∂B nên từ nguyên lý cực đại ta có điều mâu thuẫn.
Ta chứng minh xong Bổ đề. □

Một cách tương tự ta cũng có Bổ đề cho hàm điều hòa trên. Chi tiết xem như bài tập. Từ các Bổ đề này ta mở rộng khái niệm điều hòa trên, điều hòa dưới như sau:

Định nghĩa 1.4. Hàm $v \in C(\Omega)$ được gọi là điều hòa dưới nếu

với bất kỳ hình cầu $B \subset \Omega$, bất kỳ $\omega \in C(\bar{B})$ mà ω điều hòa trên B
nếu $v \leq \omega$ trên biên ∂B thì $v \leq \omega$ trong B.

Một cách tương ứng, thay dấu " $\leq$ " bởi " $\geq$ " ta có định nghĩa cho hàm điều hòa trên.

Với cách định nghĩa dùng toán tử Laplace ta có:

"điều hòa dưới + điều hòa trên = điều hòa."

Dĩ nhiên hàm điều hòa cũng vừa là điều hòa dưới, vừa điều hòa trên theo cách định nghĩa mới. Câu hỏi: với định nghĩa mở rộng khẳng định trên còn đúng không?
Tiếp đến kết quả về mối quan hệ giữa điều hòa dưới và điều hòa trên, kết quả mở rộng nguyên lý so sánh các hàm điều hòa.

Bổ đề 1.32. *Cho $u, v \in C(\bar{\Omega})$. Giả sử u là hàm điều hòa dưới còn v là hàm điều hòa trên trong Ω thỏa mãn*

$$u \leq v \text{ trên } \partial\Omega.$$

Khi đó $u \leq v$ trong Ω.

Chứng minh. Đặt $M = \max\limits_{\bar{\Omega}}(u - v)$ và

$$D = \{x \in \Omega : \ u(x) - v(x) = M\}.$$

Do tính liên tục ta có D là tập đóng trong Ω. Ta sẽ chứng minh D là tập mở trong Ω. Khi đó từ tính liên thông của Ω ta dẫn đến hai tình huống

- $D = \emptyset$ thì $u(x) - v(x) \leq M = \max\limits_{\partial\Omega}(u - v), x \in \Omega$,
- $D = \Omega$ thì $u(x) - v(x) = M, x \in \bar{\Omega}$.

Khi đó từ mối quan hệ giữa u, v trên $\partial\Omega$ ta có điều phải chứng minh.
Giờ ta chứng minh D mở trong Ω. Lấy $x_0 \in D \subset \Omega$. Do Ω là tập mở nên có hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$ với tâm x_0. Do u, v liên tục trên ∂B nên các bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong B sau

$$\begin{cases} \Delta\bar{u} & = 0 \text{ trong B}, \\ \bar{u}|_{\partial B} & = u, \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \Delta\bar{v} & = 0 \text{ trong B}, \\ \bar{v}|_{\partial B} & = v, \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm. Khi đó ta có

- từ tính điều hòa dưới của u, điều hòa trên của v ta có

  $$u \leq \bar{u}, v \geq \bar{v} \text{ trong } \bar{B}$$

  nên

  $$\bar{u}(x_0) - \bar{v}(x_0) \geq u(x_0) - v(x_0) = M,$$

- $(\bar{u} - \bar{v})|_{\partial B} = (u - v)|_{\partial B} \leq M$,
- $\Delta(\bar{u} - \bar{v}) = 0$ trong B

nên áp dụng nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa $\bar{u} - \bar{v}$ trong B ta có

$$\bar{u} - \bar{v} = M \text{ trong } \bar{B} \text{ hay } u - v = M \text{ trên } \partial B.$$

Như vậy $\partial B \subset D$. Điều này đúng với bất kỳ hình cầu $B \subset \Omega$ có tâm tại x_0 nên D mở trong Ω. Ta kết thúc chứng minh Bổ đề. □

Ta cần thêm tính chất nữa của hàm điều hòa dưới:

Bổ đề 1.33. *Cho $v \in C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa dưới trên Ω. Giả sử hàm $\omega \in C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn: có hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$ sao cho*

$$\omega = v \text{ trong } \bar{\Omega} \setminus B,$$
$$\omega \text{ điều hòa trong} B.$$

Khi đó ω là hàm điều hòa dưới trong Ω và $v \leq \omega$ trong $\bar{\Omega}$.

Chứng minh. Từ tính điều hòa dưới của v ta có ngay $v \leq \omega$ trong B. Từ đó ta có $v \leq \omega$ trong $\bar{\Omega}$.
Ta còn phải chứng minh tính điều hòa dưới của ω bằng định nghĩa. Lấy hình cầu đóng $\bar{B}' \subset \Omega$ và $u \in C(\bar{B}')$ điều hòa trong B' và $\omega \leq u$ trên $\partial B'$. Việc còn phải chứng minh lúc này $\omega \leq u$ trong B'.
Có $v \leq \omega$ trong $\bar{\Omega}$ và $\omega \leq u$ trên $\partial B'$ nên $v \leq u$ trên $\partial B'$. Lại có v là hàm điều hòa dưới trong Ω và u điều hòa trong B' nên $v \leq u$ trong B'.
TH1: $B \cap B' = \emptyset$ thì $B' \subset \bar{\Omega} \setminus B$. Từ giả thiết $\omega = v$ trong $\bar{\Omega} \setminus B$ ta có $\omega \leq u$ trong B' hay điều phải chứng minh.
TH2: $B \cap B' \neq \emptyset$. Tương tự TH1 có $\omega \leq u$ trong $B' \setminus (B \cap B')$. Việc còn phải chứng minh lúc này $\omega \leq u$ trong $B \cap B'$. Để ý rằng ω, u là các hàm điều hòa trong $B \cap B'$ nên theo nguyên lý so sánh ta chỉ còn phải chứng minh $\omega \leq u$ trên $\partial(B \cap B')$. Từ giả thiết ta có $\omega \leq u$ trên $\partial(B \cap B') \cap \partial B'$. Lại có $\omega \leq u$ trong $B' \setminus (B \cap B')$ nên $\omega \leq u$ trên $\partial(B \cap B') \cap \partial B$. Ta hoàn thành chứng minh cho Bổ đề. □

Đến lúc ta có thể chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong miền bị chặn Ω bằng phương pháp Perron. Cụ thể xét bài toán

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{1.13}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{1.14}$$

với $\varphi \in C(\partial\Omega)$.
Ký hiệu

$$S_\varphi = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ điều hòa dưới trong } \Omega, \\ v \leq \varphi \text{ trên } \partial\Omega\}.$$

Giả sử u là nghiệm của bài toán (1.13)-(1.14). Khi đó, không khó để thấy

- $u \in S_\varphi$,
- nếu $v \in S_\varphi$ thì $v \leq u$ trong Ω

nên $u = \sup S_\varphi$. Perron khẳng định điều ngược lại đúng. Dưới đây ta sẽ từng bước chứng minh khẳng định này.

Định lý 1.34. *Đặt $u_\varphi = \sup S_\varphi$, nghĩa là $u_\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ là hàm xác định bởi*

$$u_\varphi(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x), x \in \bar{\Omega}.$$

Khi đó u_φ điều hòa trong Ω.

Chứng minh. Do $\partial\Omega$ là tập compact, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ nên có

$$-\infty < m = \min_{\partial\Omega} \varphi \leq \max_{\partial\Omega} \varphi = M < +\infty.$$

Dễ có các hàm hằng m, M thuộc S_φ và từ nguyên lý so sánh

$$v \leq M \text{ trong } \Omega, v \in S_\varphi.$$

Do đó $S_\varphi \neq \emptyset$ và u_φ hoàn toàn xác định trên $\bar{\Omega}$.
Để chứng minh u_φ là hàm điều hòa trong Ω ta sẽ chứng minh nó điều hòa trên hình

cầu $B \subset \Omega$ bất kỳ.
Trước hết ta có nhận xét nếu $v_1, v_2 \in S_\varphi$ thì $\max\{v_1, v_2\} \in S_\varphi$.
Lấy B là hình cầu tâm x_0 và $\bar{B} \subset \Omega$. Do $u_\varphi = \sup S_\varphi$ nên có dãy các $v_i \in S_\varphi$ sao cho

$$\lim_{i\to\infty} v_i(x_0) = u_\varphi(x_0).$$

Do $m \in S_\varphi$ nên theo nhận xét trên ta có thể giả sử $m \le v_i \le u_\varphi$ trong $\bar{\Omega}$.
Do $v_i\Big|_{\partial B}$ là hàm liên tục nên bài toán biên Dirichlet trong hình cầu B

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i =& 0 \text{ trong } B, \\ \omega_i\Big|_{\partial B} =& v_i \end{aligned}$$

có duy nhất nghiệm. Khi đó lấy $\omega_i = v_i$ trong $\bar{\Omega} \setminus B$. Theo Bổ đề 1.33 ta có $\omega_i \in S_\varphi$ và $v_i \le \omega_i$ trong $\bar{\Omega}$. Có dãy $\omega_i, i \in \mathbb{N}$, là dãy bị chặn đều $m \le \omega_i \le M$, điều hòa trong B nên nó, có dãy con, hội tụ đều trên từng compact đến hàm điều hòa ω trong B. Việc chứng minh u_φ là hàm điều hòa trong B ta sẽ chứng minh $u_\varphi = \omega$ trong B.
Có ngay $u_\varphi(x_0) = \omega(x_0)$. Lấy $\bar{x} \in B \setminus \{x_0\}$. Bằng cách tương tự trên ta có dãy các hàm $\bar{v}_i \in S_\varphi$ sao cho

$$\lim_{i\to\infty} \bar{v}_i(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x}).$$

Như trên có $\omega_i \in S_\varphi$ nên theo nhận xét trên ta có thể giả sử

$$\omega_i \le \bar{v}_i \le u_\varphi \text{ trong } \bar{\Omega}.$$

Lại tương tự trên ta xây dựng được dãy các hàm $\bar{\omega}_i \in S_\varphi$ hội tụ đều trên từng compact trong B đến hàm điều hòa $\bar{\omega}$ sao cho

$$\omega_i \le \bar{v}_i \le \bar{\omega}_i \le u_\varphi \text{ trong } \bar{\Omega} \text{ nên } \omega \le \bar{\omega}$$

và $\bar{\omega}(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x}), \bar{\omega}(x_0) = u_\varphi(x_0) = \omega(x_0)$.
Khi đó $\omega - \bar{\omega}$ điều hòa trong B và

$$\omega - \bar{\omega} \le 0 \text{ trong } B, \omega(x_0) - \bar{\omega}(x_0) = 0.$$

Theo nguyên lý cực đại ta có $\omega - \bar{\omega} = 0$ trong B. Do đó

$$\omega(\bar{x}) = \bar{\omega}(\bar{x}) = u_\varphi(\bar{x}).$$

Do $\bar{x}$ là điểm bất kỳ trong B nên ta có điều phải chứng minh, nghĩa là u_φ điều hòa trong B và do đó điều hòa trong Ω. $\square$

Tiếp tục quan sát điều kiện biên, ta cần khái niệm hàm chặn (barrier function).

Định nghĩa 1.5. Với mỗi $x_0 \in \partial\Omega$ hàm $\omega_{x_0} \in C(\bar{\Omega})$ được gọi là hàm chặn tại điểm x_0 nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

- ω_{x_0} là hàm điều hòa dưới trên Ω,
- $\omega_{x_0}(x_0) = 0$ và $\omega_{x_0}(x) < 0, x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\}$.

Câu hỏi: liệu có hàm chặn hay không? cụ thể hơn miền như nào có hàm chặn? Miền Ω được gọi là thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài (exterior sphere condition) tại điểm $x_0 \in \partial\Omega$ nếu có hình cầu $B_{r_0}(y_0)$ nằm ngoài Ω và chỉ tiếp xúc với $\bar{\Omega}$ tại đúng một điểm x_0, cụ thể

$$\Omega \cap B_{r_0}(y_0) = \emptyset \text{ và } \bar{\Omega} \cap \bar{B}_{r_0}(y_0) = \{x_0\}.$$

Khi đó Ω có hàm chặn tại x_0

$$\omega_{x_0} = \Gamma(x - y_0) - \Gamma(x_0 - y_0).$$

Khái niệm hàm chặn cho ta kết quả sau:

Bổ đề 1.35. *Giả sử tại $x_0 \in \partial\Omega$ có hàm chặn ω_{x_0}. Khi đó*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} u_\varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Chứng minh. Để chứng minh Bổ đề này ta chứng minh

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} |u_\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$$

với bất kỳ $\epsilon > 0$.
Cố định $\epsilon > 0$. Do $\varphi \in C(\partial\Omega)$ nên có $\delta > 0$ để

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon, x \in \partial\Omega \cap B_\delta(x_0).$$

Lại do $\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ là tập compact, ω_{x_0} là hàm liên tục trên $\bar{\Omega}$ và $\omega(x) < 0, x \neq x_0$, nên có $K = K(\delta) > 0$ để

$$-K\omega_{x_0}(x) \leq 2M = 2\max_{\partial\Omega} \varphi, x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(x_0).$$

Do đó

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon - K\omega_{x_0}(x), x \in \partial\Omega.$$

Không khó để thấy

- do ω_{x_0} là hàm điều hòa dưới nên $\varphi(x_0) - \epsilon + K\omega_{x_0}$ là hàm điều hòa dưới trong Ω,
- $\varphi(x_0) - \epsilon + K\omega_{x_0} \leq \varphi$ trên $\partial\Omega$.

Như vậy $\varphi(x_0) - \epsilon + K\omega_{x_0} \in S_\varphi$ và

$$\varphi(x_0) - \epsilon + K\omega_{x_0} \leq u_\varphi \text{ trong } \bar{\Omega}. \tag{1.15}$$

Tương tự trên ta có

- do ω_{x_0} là hàm điều hòa dưới nên $\varphi(x_0) + \epsilon - K\omega_{x_0}$ là hàm điều hòa trên trong Ω,
- $\varphi(x_0) + \epsilon - K\omega_{x_0} \geq \varphi$ trên $\partial\Omega$.

Theo Bổ đề 1.32 ta có

$$\varphi(x_0) + \epsilon - K\omega_{x_0} \geq u_\varphi \text{ trong } \bar{\Omega}. \tag{1.16}$$

Từ (1.15)-(1.16) ta có

$$|u_\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon - K\omega_{x_0}(x), x \in \bar{\Omega}.$$

Do $\omega_{x_0} \in C(\bar{\Omega})$ và $\omega_{x_0}(x_0)$, cho $x \to x_0, x \in \Omega$, ta có điều phải chứng minh. □

Tóm lại ta đã chứng minh được Định lý về sự tồn tại nghiệm cho bài toán biên Dirichlet của Perron.

Định lý 1.36 (Định lý Perron)**.** *Cho Ω là miền bị chặn thỏa mãn mọi điểm trên biên $\partial\Omega$ đều có hàm chặn. Khi đó với bất kỳ hàm $\varphi \in C(\partial\Omega)$ ta có $u_\varphi = \sup S_\varphi$ là nghiệm của bài toán* (1.13)-(1.14).

1.4 Phương trình Poisson

Trong mục này ta nghiên cứu phương trình Poisson

$$\Delta u = f.$$

1.4.1 Nghiệm cổ điển

Nhắc lại đồng nhất thức Green, khi $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta_y u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \big(\Gamma(x-y)\partial_{\nu_y} u(y) - u(y)\partial_{\nu_y}\Gamma(x-y)\big)\, dS_y.$$

Khi $u \in C_0^\infty(\Omega)$ có $u = 0$ gần biên $\partial\Omega$ nên $\partial_{\nu_y} u(y) = 0$ trên biên $\partial\Omega$. Do đó

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta_y u(y)dy.$$

Tích phân này được gọi là thế vị Newton. Nó là gợi ý để ta tìm nghiệm cho phương trình Poisson. Nói cách khác, dưới đây ta sẽ chỉ ra thế vị Newton cho ta nghiệm cổ điển của phương trình Poisson.
Trước hết ta quan sát các tiệm cận, khi $y \to x$

$$\Gamma(x-y) \sim \begin{cases} \ln|x-y| & \text{khi } n = 2, \\ |x-y|^{2-n} & \text{khi } n \geq 3, \end{cases}$$

$$\nabla\Gamma(x-y) \sim |x-y|^{1-n}, \quad \nabla^2\Gamma(x-y) \sim |x-y|^{-n}.$$

Mà

- khi $n = 2$ có $\int_{B_1} \ln(1/|x|)dx = -2\pi \int_0^1 r\ln r dr = \pi/2$,
- khi $n \geq 3$ có $\int_{B_1} |x|^{2-n}dx = \omega_n \int_0^1 r dr = \omega_n/2$,
- còn
$$\int_{B_1} |x|^{1-n}dx = \omega_n, \quad \int_{B_1} |x|^{-n}dx = \omega_n \int_0^1 r^{-1}dr = +\infty.$$

Với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, nếu chỉ đòi hỏi f bị chặn trong Ω thì thế vị Newton

$$\omega_f(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy$$

hoàn toàn xác định và là hàm thuộc lớp C^1. Tuy nhiên như thế chưa thể là nghiệm cổ điển của phương trình Poisson. Để là nghiệm của phương trình Poisson ta cần tăng điều kiện về tính trơn của f. Cụ thể ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề 1.37. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, f là hàm bị chặn trên Ω và ω_f là thế vị Newton. Giả sử $f \in C^{k-1}(\Omega)$ với số nguyên $k \geq 2$. Khi đó $\omega_f \in C^k(\Omega)$ và thỏa mãn phương trình Poisson trong Ω. Hơn nữa nếu f là hàm trơn trong Ω thì ω_f cũng trơn trong Ω.*

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp f có giá compact trong Ω. Khi đó ta có thể hiểu f xác định trên toàn $\mathbb{R}^n$, có giá trị bằng 0 ngoài Ω. Do có giá compact trong Ω nên từ giả thiết về độ trơn ta vẫn có $f \in C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ và

$$\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f(y+z)dz.$$

Do $\Gamma \in L^1(\mathbb{R}^n), f \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ nên

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\omega_f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f_{x_i}(x+z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f_{z_i}(x+z)dz \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{z_i}(z)f(x+z)dz.\end{aligned}$$

Tiếp tục đạo hàm cấp $\alpha, |\alpha| \leq k-1$, có

$$\partial^\alpha \partial_{x_i}\omega_f(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{z_i}(z)\partial_z^\alpha f(x+z)dz.$$

Như vậy nếu $f \in C_0^{k-1}(\Omega)$ thì $\omega_f \in C^k(\Omega)$. Hơn nữa nếu $f \in C_0^\infty(\Omega)$ thì $\omega_f \in C^\infty(\Omega)$. Ngoài ra, với mỗi $x \in \Omega$ ta có

$$\begin{aligned}\Delta\omega_f(x) &= \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \Gamma_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\epsilon\leq|z|\geq R} \Gamma_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz\end{aligned}$$

trong đó $R = R(x)$ đủ lớn để $x + \Omega \subset B_R$, chẳng hạn $R = |x| + 2d(\Omega)$.
Sử dụng công thức Green thứ nhất với chú ý $\operatorname{supp} f \subset B_R$ và $\Delta\Gamma = 0$ trong $B_R \setminus B_\epsilon$ ta có

$$\int\limits_{\epsilon\leq|z|\geq R} \Gamma_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz = \int\limits_{\partial B_\epsilon} \partial_\nu\Gamma(z)f(x+z)dS_z.$$

Lại có trên mặt cầu ∂B_ϵ có $\partial_\nu \Gamma(z) = -\dfrac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}}$ nên

$$\Delta\omega(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon} f(x+z) dS_z = f(x).$$

Ta đã chứng minh bổ đề cho trường hợp f có giá compact. Ta tiếp tục chứng minh trường hợp tổng quát. Lấy $x_0 \in \Omega$. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề ở quanh điểm x_0. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Lấy $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ thỏa mãn $\varphi = 1$ trong $B_{r/2}(x_0)$.

- $\varphi(\cdot) f(\cdot)$ có giá compact nên theo chứng minh trên

  $$\omega_{\varphi f}(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\varphi(y) f(y) dy$$

  thuộc lớp $C^k(\Omega)$ khi $f \in C^{k-1}(\Omega)$, trơn khi f trơn. Hơn nữa

  $$\Delta\omega_{\varphi f} = f \text{ trong } B_{r/2}(x_0).$$

- Còn

  $$\int_\Omega \Gamma(x-y)(1-\varphi(y)) f(y) dy = \int_{\Omega \setminus B_{r/2}(x_0)} \Gamma(x-y)(1-\varphi(y)) f(y) dy$$

  là hàm điều hòa trong $B_{r/4}(x_0)$ vì với mỗi $y \notin B_{r/2}(x_0)$ có

  $$\Gamma(\cdot - y) \text{ điều hòa trong } B_{r/4}(x_0)$$

  và $(1-\varphi(\cdot)) f(\cdot)$ bị chặn trong Ω.

Từ đây ta hoàn thành chứng minh bổ đề. □

Bổ đề trên cho ta biết độ trơn của thế vị Newton, nghiệm đặc biệt của phương trình Poisson. Tiếp theo ta chỉ ra đó cũng là tính chất chung cho nghiệm của phương trình Poisson.

Định lý 1.38. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$. Giả sử $u \in C^2(\Omega)$ là nghiệm của phương trình Poisson trong Ω. Nếu $f \in C^{k-1}(\Omega)$, số nguyên $k \geq 2$, thì $f \in C^k(\Omega)$. Hơn nữa nếu f trơn thì u trơn trong Ω.*

Chứng minh. Tính trơn có tính địa phương nên ta chỉ cần xét trong các hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$. Khi đó theo Bổ đề 1.37 thế vị Newton $\omega_{f,B} \in C^k(B)$ nếu $f \in C^{k-1}(\Omega), k \geq 2$. Khi đó

$$\Delta\omega_{f,B} = f \text{ trong } B.$$

Đặt $v = u - \omega_{f,B}$ ta có v là hàm điều hòa trong B. Do đó $u \in C^k(B)$ với bất kỳ hình cầu $B \subset \Omega$

Khi f trơn trong Ω thì u trơn trong B với bất kỳ hình cầu $B \subset \Omega$.

Ta hoàn thành chứng minh. □

Từ kết quả này ta giải được bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson.

Định lý 1.39. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện cầu ngoài tại mọi điểm trên biên, f là hàm bị chặn, thuộc lớp C^1 trong Ω và φ là hàm liên tục trên biên $\partial\Omega$. Khi đó có nghiệm $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ của bài toán biên Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u =& f \text{ trong } \Omega, \\ u =& \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hơn nữa nếu $f \in C^\infty(\Omega)$ thì $u \in C^\infty(\Omega)$.

Chứng minh. Lấy ω_f là thế vị Newton của f trong Ω. Theo Bổ đề 1.37 ta có $\omega_f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và $\Delta\omega_f = f$ trong Ω. Đặt $v = u - \omega_f$ ta có

$$\begin{aligned} \Delta v =& 0 \text{ trong } \Omega, \\ v =& \varphi - \omega_f \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Có $\varphi - \omega_f \in C(\partial\Omega)$ nên theo Định lý 1.36 bài toán trên có nghiệm $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Như vậy nghiệm $u = v + \omega_f$ thỏa mãn bài toán trong định lý. Lại theo Định lý 1.38, nếu f trơn thì u cũng trơn trong Ω. □

Liệu ta có thể giảm độ trơn của f mà vẫn có các kết quả trên không. Ví dụ sau cho thấy nếu f chỉ liên tục thì có thể không có.

Ví dụ 1.3. Lấy $u : B_1 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2} & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Với $x \in B_1 \setminus \{0\}$, tính toán ta được

$$\begin{aligned}
u_{x_1} =& 2x_1(-\ln|x|)^{1/2} - \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}},\\
u_{x_2} =& -2x_2(-\ln|x|)^{1/2} - \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}},\\
u_{x_1x_1} =& 2(-\ln|x|)^{1/2} - \left(\frac{2x_1^2}{|x|^2} + \frac{x_1^4 + 4x_1^2x_2^2 - x_2^4}{2|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}}\right) -\\
& - \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}},\\
u_{x_2x_2} =& -2(-\ln|x|)^{1/2} + \left(\frac{2x_2^2}{|x|^2} - \frac{x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - x_2^4}{2|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}}\right) -\\
& - \frac{x_2^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}},
\end{aligned}$$

nên

$$\Delta u = f \text{ trong } B_1 \setminus \{0\}$$

với

$$f(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2}\left\{\frac{2}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{4(-\ln|x|)^{3/2}}\right\}, x \in B_1 \setminus \{0\}.$$

Có thể thấy nếu lấy $f(0) = 0$ ta có $f \in C(B_1)$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned}
u_{x_1}(0,0) &= \lim_{h\to 0} h(-\ln|h|)^{1/2} = 0,\\
u_{x_1x_1}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\left(2(-\ln|h|)^{1/2} - \frac{1}{2(-\ln|h|)^{1/2}}\right) = +\infty
\end{aligned}$$

nên $u \notin C^2(B_1)$.

Ta sẽ chứng minh với $f \in C(B_1)$ như trên phương trình Poisson không có nghiệm trong $C^2(B_1)$. Thật vậy, giả sử nó có nghiệm $v \in C^2(B_1)$. Khi đó $\omega = u - v \in C(B_1)$ là hàm điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$. Từ Định lý 1.30 về kỳ dị khử được ta có ω là hàm điều hòa trên B_1. Do đó $u = \omega + v \in C^2(B_1)$. Ta có điều vô lý.

Có thể chăng, ta chỉ cần giả thiết f nằm giữa $C(\Omega)$ và $C^1(\Omega)$, chẳng hạn trong không gian Holder $C^\alpha(\Omega), 0 < \alpha < 1$? Đến đây ta gặp lý thuyết Schauder.

1.4.2 Nghiệm yếu

Trong mục này ta tìm nghiệm yếu trong không gian Sobolev của bài toán

$$-\Delta u = f \text{ trong } \Omega, \tag{1.17}$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{1.18}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.
Trước hết ta đưa ra khái niệm không gian Sobolev.

Định nghĩa 1.6. Không gian Sobolev $H^1(\Omega)$ gồm các hàm f trong $L^2(\Omega)$ có các L^2-đạo hàm trong Ω, nghĩa là có các $\partial_{x_i} f \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$, thỏa mãn

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\partial_{x_i}\varphi(x)dx.$$

Ta nói $\partial_{x_i} f$ là L^2-đạo hàm riêng theo biến x_i của f.

Ví dụ 1.4. Lấy $\Omega = (-1,1), |x| \in L^2(-1,1)$ có L^2-đạo hàm là

$$(|x|)' = \text{sgn}(x) \in L^2(-1,1).$$

Do đó $|x| \in H^1(-1,1)$. Tuy nhiên $\text{sgn}(x) \notin H^1(-1,1)$.

Để ý rằng, nếu $u \in C^2(\Omega), \varphi \in C_0^1(\Omega)$ thì từ công thức Green thứ nhất ta có

$$\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

Từ đây, với $f \in C(\bar{\Omega})$, hàm $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn phương trình Poisson

$$-\Delta u = f \text{ trong } \Omega$$

khi và chỉ khi

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx, \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{1.19}$$

Điều này gợi ý cho ta cách định nghĩa nghiệm yếu như sau.

Định nghĩa 1.7. Cho $f \in L^2(\Omega), u \in H^1(\Omega)$. Khi đó u được gọi là nghiệm yếu của phương trình Poisson $-\Delta u = f$ trong Ω nếu (1.19) xảy ra với mọi $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Để giải bài toán (1.17)-(1.18) ta thu hẹp không gian $H^1(\Omega)$. Ta ký hiệu

$$\mathcal{C} = \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega\}.$$

Nhờ bất đẳng thức Poincare ta có tích vô hướng trên $\mathcal{C}$

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Tích vô hướng này sinh ra chuẩn trên $\mathcal{C}$

$$||u||_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Để ý rằng, với mỗi $f \in L^2(\Omega)$ xác định một phiếm hàm trên $\mathcal{C}$

$$F : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức Poincare dẫn đến F là phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $(\mathcal{C}, ||\cdot||_{H_0^1})$. Nếu $\mathcal{C}$ với chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$ là không gian Hilbert thì theo Định lý biểu diễn Riesz có duy nhất một hàm $u \in \mathcal{C}$ để

$$(u, \varphi)_{H_0^1} = F(\varphi), \varphi \in \mathcal{C}.$$

Khi đó u là nghiệm yếu của phương trình Poisson. Kết hợp với tính chất không gian $\mathcal{C}$ có $u = 0$ trên $\partial\Omega$ ta có u là nghiệm yếu của bài toán (1.17)-(1.18).
Tuy nhiên $\mathcal{C}$ lại không đầy đủ theo chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$ nên lập luận trên mới chỉ dừng lại ở trước Định lý biểu diễn Riesz. Ta cần làm đầy $\mathcal{C}$.

Định nghĩa 1.8. Không gian Sobolev $H_0^1(\Omega)$ là không gian làm đầy $C_0^1(\Omega)$ bởi chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$.

Không khó khăn để thấy $\mathcal{C} \subset H_0^1(\Omega)$. Tuy nhiên định nghĩa trên không cho ta thấy những hàm thuộc $H_0^1(\Omega)$ thì như nào? Kết quả sau làm rõ điều này.

Định lý 1.40. *Không gian $H_0^1(\Omega)$ là không gian con của $H^1(\Omega)$ và là không gian Hilbert với chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, nghĩa là với dãy Cauchy $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ trong $C_0^1(\Omega)$ theo chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$ hội tụ trong $H^1(\Omega)$. Thật vậy, do Cauchy theo chuẩn $||\cdot||_{H_0^1}$ nên dãy các đạo hàm riêng $\{\partial_{x_k} v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy trong $L^2(\Omega)$. Từ tính đầy đủ của $L^2(\Omega)$ nên có các hàm $u_k \in L^2(\Omega)$ để

$$||\partial_{x_k} v_i - v_k||_{L^2} \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Lại từ bất đẳng thức Poincare có

$$||v_i - v_j||_{L^2} \leq C||v_i - v_j||_{H_0^1}$$

nên dãy $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy trong $L^2(\Omega)$. Lại do tính đầy đủ có dãy $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một hàm u trong $L^2(\Omega)$. Điều này cho thấy mỗi hàm trong $H_0^1(\Omega)$ là hàm bình phương khả tích trong Ω, hay $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Để chỉ ra $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ ta còn phải chứng minh các u_k chính là các L^2-đạo hàm riêng theo biến x_k của u, nghĩa là

$$\int_\Omega u_k(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_{x_k}\varphi(x)dx, \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Điều này có được nhờ

- $\lim_{i\to\infty} ||\partial_{x_k} v_i - u_k||_{L^2} = 0, \lim_{i\to\infty} ||v_i - u||_{L^2} = 0,$
- $|\int_\Omega (\partial_{x_k} v_i - u_k)\varphi dx| \leq ||\partial_{x_k} v_i - u_k||_{L^2}||\varphi||_{L^2},$
- $|\int_\Omega (v_i - u)\partial_{x_k}\varphi dx| \leq ||\partial_{x_k} v_i - u_k||_{L^2}||\partial_{x_k}\varphi||_{L^2},$
- $\int_\Omega \partial_{x_k} v_i \varphi dx = -\int_\Omega v_i \partial_{x_k}\varphi dx.$

Như vậy $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ có tích vô hướng $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$, trong đó các đạo hàm riêng được hiểu là L^2-đạo hàm riêng, là không gian Hilbert. □

Từ kết quả trên, quay trở lại lập luận trước, ta dùng Định lý biểu diễn Riesz cho phiếm hàm F trong không gian $H_0^1(\Omega)$ ta được kết quả sau:

Định lý 1.41. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, f \in L^2(\Omega)$. Khi đó phương trình Poisson $-\Delta u = f$ có nghiệm yếu trong $H_0^1(\Omega)$.*

Nói chung nghiệm yếu trong Định lý 1.41 không thỏa mãn điều kiện biên theo nghĩa từng điểm. Lý do biên $\partial\Omega$ có độ đo không, còn u chỉ là hàm đo được. Ta sẽ hiểu điều kiện biên theo nghĩa lấy vết như sau:

$$u \text{ có một dãy các hàm } v_i \in C_0^1(\Omega) \text{ hội tụ đến } u \text{ theo chuẩn } ||\cdot||_{H_0^1}.$$

Ta nói nghiệm u trong Định lý 1.41 là nghiệm yếu của bài toán (1.17)-(1.18).
Ta có thể hỏi về độ trơn của nghiệm u trong Định lý 1.41. Khi đó ta gặp các không gian Sobolev $H^m(\Omega), m \in \mathbb{Z}_+$. Không gian này gồm các hàm trong $L^2(\Omega)$ có các L^2-đạo hàm riêng đến cấp m trong Ω. Nói sơ qua về khía cạnh này ta có kết quả tối ưu:

$$\text{Nếu } \Delta u \in H^m(\Omega), m \in \mathbb{Z}_+ \text{ thì } u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Ta chuyển sang cách tiếp cận khác về việc tìm nghiệm yếu của phương trình Poisson

$$-\Delta u = f \text{ trong } \Omega$$

trong $H_0^1(\Omega)$ bằng cách cực tiểu hóa phiếm hàm năng lượng

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fudx.$$

Lấy $u \in H^1(\Omega), \varphi \in C_0^1(\Omega)$ có

$$J(u+\varphi) = J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega f\varphi dx.$$

Nếu u là nghiệm yếu của phương trình Poisson $-\Delta u = f$ thì u chính là điểm làm phiếm hàm J đạt GTNN trong tập các hàm thuộc $H^1(\Omega)$ có cùng giá trị biên, theo nghĩa vết.
Tiếp đến ta chứng minh trong những hàm thuộc $H^1(\Omega)$ có cùng giá trị biên, theo nghĩa vết, hàm cực tiểu hóa phiếm hàm năng lượng J chính là nghiệm yếu của phương trình Poisson. Thật vậy, với bất kỳ $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, có

$$J(u+\epsilon\varphi) \geq J(u), \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Nói cách khác hàm $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$j(\epsilon) = J(u+\epsilon\varphi)$$

đạt GTNN tại $\epsilon = 0$. Theo Fermat ta có $j'(0) = 0$. Tính toán

$$j'(0) = \lim_{h \to 0}(J(u + h\varphi) - J(u))/h = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega f\varphi dx.$$

Từ đây ta có u là nghiệm yếu của phương trình Poisson.

Như vậy ta đã chỉ ra nghiệm yếu của bài toán (1.17)-(1.18) chính là điểm cực tiểu hóa phiếm hàm J trong không gian $H_0^1(\Omega)$. Từ tính liên tục dưới yếu của phiếm hàm J trên $H_0^1(\Omega)$ và Định lý Rellich về phép nhúng compact $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, và tính phản xạ của $H_0^1(\Omega)$, phiếm hàm J có duy nhất một điểm cực tiếu hóa trong $H_0^1(\Omega)$. Ta không đi sâu vào vấn đề này ở giáo trình này.