Giáo trình
Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Đặng Anh Tuấn

Ngày 12 tháng 3 năm 2016

Mục lục

1 Phương trình truyền nhiệt **1**

1.1 Biến đổi Fourier 1

1.1.1 Các tính chất cơ bản 1

1.1.2 Ví dụ ứng dụng biến đổi Fourier 3

1.2 Nghiệm cơ bản 4

1.2.1 Tính chất của nghiệm cơ bản 4

1.2.2 Tính chính quy 11

1.2.3 Tính chất giá trị trung bình 15

1.3 Nguyên lý cực đại 19

1.3.1 Nguyên lý cực đại yếu 19

1.3.2 Nguyên lý cực đại mạnh 23

1.3.3 Đánh giá tiên nghiệm 29

1.3.4 Đánh giá gradient 32

1.3.5 Bất đẳng thức Harnack 34

1.4 Phương trình không thuần nhất 41

1.4.1 Phương trình không thuần nhất trên toàn không gian 41

1.4.2 Phương trình không thuần nhất trong miền bị chặn 44

Chương 1

Phương trình truyền nhiệt

1.1 Biến đổi Fourier

1.1.1 Các tính chất cơ bản

Trước hết ta định nghĩa không gian các hàm giảm nhanh Schwartz $\mathcal{S}$ gồm các hàm $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ sao cho $x^\beta \partial^\alpha u(x)$ bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, với bất kỳ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Ví dụ 1.1. Ví dụ điển hình $e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}$. Những ví dụ khác $x^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Không gian $\mathcal{S}$ là không gian véc-tơ trên trường $\mathbb{C}$. Ánh xạ lấy đạo hàm riêng cấp $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ cũng là ánh xạ tuyến tính trong $\mathcal{S}$. Ngoài ra, với hàm $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn: với bất kỳ $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ đều có $C_\alpha > 0, m_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ sao cho

$$|\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{m_\alpha}, x \in \mathbb{R}^n,$$

ánh xạ $\varphi \mapsto a\varphi$ là ánh xạ tuyến tính trong $\mathcal{S}$.

Ví dụ 1.2. Ánh xạ

$$\varphi \mapsto \frac{\varphi}{1 + |x|^2}$$

là ánh xạ tuyến tính trong $\mathcal{S}$.

Định nghĩa 1.1. Với $u \in \mathcal{S}$, biến đổi Fourier của u được xác định bởi

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx.$$

Ví dụ 1.3. $\widehat{e^{-|x|^2/2}}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$.

Biến đổi Fourier là ánh xạ tuyến tính trong $\mathcal{S}$. Điều này được chứng minh nhờ bổ đề sau:

Bổ đề 1.1. *Cho $u \in \mathcal{S}$. Khi đó $\hat{u} \in \mathcal{S}$. Hơn nữa với bất kỳ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ có*

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) =&(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),\\ \partial^\beta \hat{u}(\xi) =&(-i)^{|\beta|}\widehat{x^\beta u}(\xi).\end{aligned}$$

Biến đổi Fourier còn là một đẳng cấu trong $\mathcal{S}$ với biến đổi Fourier ngược

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}u(\xi)d\xi.$$

Một số tính chất của biến đổi Fourier:

Mệnh đề 1.2. *(i) Với $u \in \mathcal{S}, a \in \mathbb{R}^n$ có $\widehat{u(\cdot - a)}(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\hat{u}(\xi)$.*

(ii) Với $u \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ có $\widehat{u(k\cdot)}(\xi) = |k|^{-n}\hat{u}(\xi/k)$.

(iii) Với $u, v \in \mathcal{S}$ có

$$\begin{aligned}\widehat{u * v}(\xi) =&(2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi),\\ \widehat{u\cdot v}(\xi) =&(2\pi)^{-n/2}(\hat{u} * \hat{v})(\xi),\\ \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx =& \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi.\end{aligned}$$

Biến đổi ngược Fourier cũng có các tính chất tương tự trên.
Trong tính chất (iii) phép tích chập được định nghĩa

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

là phép toán trong $\mathcal{S}$.
Đẳng thức cuối trong tính chất (iii) được gọi là đẳng thức Parseval. Từ đó lấy $u = v$ ta có đẳng thức Plancherel

$$||u||_{L^2} = ||\hat{u}||_{L^2}.$$

Không khó để dẫn đến định nghĩa biến đổi Fourier trong $L^2(\mathbb{R}^n)$ từ đẳng thức Plancherel.∎

1.1.2 Ví dụ ứng dụng biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier giúp ta giải phương trình đạo hàm riêng với hệ số hằng, một việc được coi rất khó vào đầu thế kỷ XX. Dưới đây ta xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1.4. Xét phương trình

$$-\Delta u + u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Bằng cách dùng tích phân năng lượng

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ta dẫn đến tính duy nhất nghiệm của phương trình (1.1) trong $\mathcal{S}$. Tiếp theo ta sẽ chỉ ra nghiệm của phương trình (1.1) trong $\mathcal{S}$. Với $f \in \mathcal{S}$, biến đổi Fourier cả hai vế của (1.1) ta được

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2}\hat{f}(\xi).$$

Từ Ví dụ 1.2 ta có $\hat{f}/(1+|\xi|^2) \in \mathcal{S}$ nên nghiệm của (1.1)

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2} d\xi.$$

Từ tính chất của biến đổi Fourier nghiệm tìm được này có tính chất sau:

- $u \in \mathcal{S}$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} (|u(x)|^2 + 2|\nabla u(x)|^2 + |\nabla^2 u(x)|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$.

Ví dụ trên ta xét phương trình elliptic. Ví dụ tiếp theo ta quan tâm đến bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt.

Ví dụ 1.5. Xét bài toán Cauchy

$$u_t - \Delta_x u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Ký hiệu $S_0(S_1)$ là không gian các hàm $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$, sao cho

- với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ hàm $u(x,\cdot) \in C[0,\infty)$ ($C^1(0,\infty) \cap C[0,\infty)$ tương ứng),

- với mỗi $t \in [0, \infty)$ hàm $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}$.

Khi đó, bằng cách dùng tích phân năng lượng

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,t)dx$$

ta dẫn đến tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.2)-(1.3).
Với $f \in S_0, u_0 \in \mathcal{S}$ dùng biến đổi Fourier theo biến x bài toán (1.2)-(1.3) ta được bài toán

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} =& \hat{f}(\xi, \cdot) \text{ khi } t > 0, \\ \hat{u}(x, 0) =& \hat{u}_0. \end{aligned}$$

Từ công thức biến thiên Lagrange ta có nghiệm của bài toán trên

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2 t} + \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} \hat{f}(\xi, s)ds.$$

Sử dụng các tính chất của biến đổi ngược Fourier ta thu được nghiệm

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-s)f(y,s)dy$$

với nhân Weierstrass-Gauss

$$K(x,t) = (2\pi)^{-n/2}\widehat{e^{-|\xi|^2 t}}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

1.2 Nghiệm cơ bản

Nhân Weierstrass-Gauss trong Ví dụ 1.5 còn được gọi là nhân nhiệt (heat kernel) hay nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt. Trong mục này ta xem các tính chất của nó.

1.2.1 Tính chất của nghiệm cơ bản

Mệnh đề 1.3. *Nghiệm cơ bản $K(x,t)$ của phương trình truyền nhiệt có các tính chất:*

(i) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

(ii) $K(x,t) > 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$

(iii) $(\partial_t - \Delta_x)K = 0$ *trong* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)dx = 1, t > 0.$

(v) *Với mỗi* $\delta > 0$ *có*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} K(x,t)dx = 0.$$

Chứng minh. Các tính chất (i)-(ii) nhìn thấy ngay từ công thức của nghiệm cơ bản

$$K(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Tính chất (iii) thấy được nhờ tính toán trực tiếp

- $K_t(x,t) = \left(\dfrac{|x|^2}{4t^2} - \dfrac{n}{2t}\right) K(x,t),$
- $K_{x_i x_i}(x,t) = \left(\dfrac{x_i^2}{4t^2} - \dfrac{1}{2t}\right) K(x,t).$

Tính chất (iv)-(v) có được nhờ, với $\delta > 0, t > 0$,

$$\int_{|x|>\delta} K(x,t)dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \pi^{n/2},$$
$$\frac{\delta}{2\sqrt{t}} \to +\infty \text{ khi } t \to 0^+.$$

□

Cố định $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \epsilon > 0$ ta ký hiệu

$$\tilde{K}_\epsilon(y,s) = K(x-y, t+\epsilon-s), s < t+\epsilon.$$

Từ các tính chất của K ta có:

- $\tilde{K}_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (-\infty, t+\epsilon)),$
- $\tilde{K}_\epsilon(y,s) > 0, (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, t+\epsilon),$

- $(\partial_s + \Delta_y)\tilde{K}_\epsilon = 0$ trong $\mathbb{R}^n \times (-\infty, t+\epsilon)$,
- với mỗi $\delta > 0$ có
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_\delta(x)} \tilde{K}_\epsilon(y,t)dy = 1,$$
- tổng quát, với bất kỳ tập mở U chứa x có
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus U} \tilde{K}_\epsilon(y,t)dy = 0,$$
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{U} \tilde{K}_\epsilon(y,t)dy = 1.$$

Ta có kết quả sau:

Định lý 1.4. *Cho $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$ và với mỗi $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ xét*
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)u_0(y)dy.$$
Khi đó $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ thỏa mãn
$$u_t - \Delta_x u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{1.4}$$
$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = u_0(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Chứng minh. Để chứng minh tính trơn của u ta sẽ chứng minh nó có đạo hàm riêng mọi cấp, và đạo hàm riêng mọi cấp của nó đều liên tục. Cụ thể ta sẽ chứng minh tích phân
$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t^k \partial_x^\alpha K(x-y,t)u_0(y)dy$$
hội tụ tuyệt đối, đều theo (x,t) trong $\mathbb{R}^n \times (\epsilon,\infty)$ với bất kỳ $\epsilon > 0$. Thật vậy, tính toán cụ thể ta thấy $\partial_t^k \partial_x^\alpha K(x-y,t)$ là tổng của hữu hạn các số hạng có dạng
$$C_{\beta,m} t^{-m}(x-y)^\beta e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Từ đây và tính liên tục, bị chặn của u_0 ta có ngay sự hội tụ tuyệt đối đều của tích phân trên. Từ đó ta có $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ và
$$\partial_t^k \partial_x^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t^k \partial_x^\alpha K(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Như vậy, từ tính chất (iii) của K ta có

$$u_t - \Delta_x u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Để chứng minh phần còn lại ta xét

$$u(x,t) - u_0(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)(u_0(y) - u_0(x_0))dy \text{ (tính chất (ii) của } K).$$

Cố định $\epsilon > 0$. Do $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ nên có $\delta > 0$ để

$$|u(y) - u(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}, |y - x_0| < 2\delta.$$

Lấy $x \in B_\delta(x_0), y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(x_0)$ có $B_{2\delta}(x_0)$ là tập mở chứa x nên từ tính chất của $\tilde{K}_t$ ta có

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(x_0)} K(x-y,t)dy = 0.$$

Khi đó có $t_0 > 0$ để khi $0 < t < t_0$ có

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(x_0)} K(x-y,t)dy < \frac{1}{4M\epsilon}$$

với $M = ||u_0||_{L^\infty}$.

Từ tính chất (ii) và (iv) của K có $||u||_{L^\infty} \leq M$ và khi $x \in B_\delta(x_0)$, $0 < t < t_0$

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_0(x_0)| \leq & \int_{B_{2\delta}(x_0)} K(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(x_0)} K(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy \\ \leq & \epsilon. \end{aligned}$$

Phân tích chi tiết ta có thể thấy δ, t_0 không phụ thuộc vào x_0 trên từng compact. □

Nếu chỉ quan tâm hàm $u(x,t)$ khi $t > 0$ ta chỉ cần $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$ ta đã có $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ và thỏa mãn phương trình truyền nhiệt trong $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Đặc biệt khi $p = 1$ ta có kết quả về tốc độ triệt tiêu của nghiệm như sau:

Mệnh đề 1.5. *Cho $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Khi đó, với $t > 0$ có

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} ||u_0||_{L^1}.$$

Tiếp theo ta thấy giả thiết về tính bị chặn của u_0 khá chặt qua việc quan sát

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-4\alpha t)^{n/2}} e^{\frac{\alpha}{1-4\alpha t}|x|^2}, \alpha > 0, 0 < t < 1/(4\alpha).$$

Có thể thấy $G_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, 1/(4\alpha)))$ và thỏa mãn bài toán

$$\begin{aligned} G_{\alpha t} - \Delta_x G_\alpha =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, 1/(4\alpha)), \\ G_\alpha(x,0) =& e^{\alpha|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Có thể thấy điều kiện ban đầu của bài toán trên không những không bị chặn mà có độ tăng ra vô cùng cấp mũ. Tuy nhiên để ý thêm thời gian tồn tại chỉ hữu hạn, dưới $1/(4\alpha)$. Dưới đây ta đưa ra kết quả như ví dụ này:

Định lý 1.6. *Cho $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ có độ tăng thỏa mãn*

$$|u_0(x)| \le M e^{A|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n,$$

với các hằng số dương M, A. Khi đó

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) u_0(y) dy$$

là hàm trơn vô hạn trong $\mathbb{R}^n \times (0, 1/(4A))$ và thỏa mãn

$$u_t - \Delta_x u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, 1/(4A)).$$

Hơn nữa

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ t>0}} u(x,t) = u_0(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. Trước hết ta chuyển dạng toàn phương theo biến y về dạng chính tắc

$$-\frac{|x-y|^2}{4t} + A|y|^2 = -\frac{1-4At}{4t}\left|y - \frac{x}{1-4At}\right|^2 + \frac{A|x|^2}{1-4At}, 0 < t < \frac{1}{4A}.$$

Đặt $v_0(x) = e^{-A|x|^2} u_0(x)$ ta có $||v_0||_{L^\infty} \le M$ và

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{A|x|^2}{1-4At}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1-4At}{4t}\left|y - \frac{x}{4At}\right|^2} v_0(y) dy,$$

$$\partial_t^k \partial_x^\alpha K(x-y,t) = \sum_{\text{hữu hạn}} C_{\beta,m} t^{-m}(x-y)^\beta e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^{|\beta|}}{t^m} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy = \frac{1}{t^m} e^{\frac{A|x|^2}{1-4At}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{|\beta|} e^{-\frac{1-4At}{4t}\left|y-\frac{x}{4At}\right|^2} v_0(y)dy.$$

Lại có

$$|x-y| \le \frac{1}{1-4At}|x| + \left|y - \frac{x}{1-4At}\right|, 0 < t < \frac{1}{4A}$$

nên tương tự Định lý 1.4 ta có $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, 1/(4A)))$ và thỏa mãn phương trình truyền nhiệt trong $\mathbb{R}^n \times (0, 1/(4A))$.

Để chứng minh phần còn lại ta để ý khi

$$0 < t < \frac{1}{8A}, |y-x_0| > 2\delta, |x-x_0| < \delta/2$$

có

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{|y-x_0|>2\delta} K(x-y,t)u_0(y)dy\right| &\le \frac{M}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{A|x|^2}{1-4At}} \int\limits_{|y-x_0|>2\delta} e^{-\frac{1-4At}{4t}\left|y-\frac{x}{4At}\right|^2} dy \\
&\le \frac{M}{(4\pi t)^{n/2}} e^{2A|x|^2} \int\limits_{|y-x_0|>2\delta} e^{-\frac{1}{8t}\left|y-\frac{x}{1-4At}\right|^2} dy \\
&\le \frac{M}{\pi^{n/2}} e^{2A|x|^2} \int\limits_{|\eta|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2/2} d\eta
\end{aligned}$$

Lại tiếp tục như Định lý 1.4 ta hoàn thành chứng minh Định lý này. □

Đến đây ta có câu hỏi, liệu phương bài toán Cauchy xét ở trên còn có nghiệm khác hay không? Nói cách khác bài toán Cauchy thuần nhất có nghiệm không tầm thường không?

Ví dụ sau cho câu trả lời có.

Ví dụ 1.6 (Ví dụ Tikhonov). Xét bài toán

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \text{ trong } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\
u(0,t) = a(t), u_x(0,t) &= 0 \text{ khi } t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

với hàm cho trước $a \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng chuỗi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)x^k.$$

Thay vào bài toán ta có

$$a_0(t) = a(t), a_1(t) = 0 \text{ và } a_k(t) = \frac{1}{k(k-1)}a'_{k-2}(t) \text{ khi } k \geq 2.$$

Ta có nghiệm

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}a^{(2k)}(t)x^{2k}.$$

Nếu

$$a(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{khi } t > 0, \\ 0 & \text{khi } t \leq 0 \end{cases}$$

thì $a^{(k)}(0) = 0, k \in \mathbb{Z}_+$. Do đó $u(x,t)$ là nghiệm không tầm thường của bài toán Cauchy

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} =& 0 \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) =& 0, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Một ví dụ khác cho thấy bài toán ngược của phương trình truyền nhiệt không ổn định.

Ví dụ 1.7. Bài toán ngược

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} =& 0 \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,T) =& \varphi(x), x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

có nghiệm $u_m(x) = e^{m^2(T-t)}\sin(mx)$ khi $\varphi(x) = \varphi_m(x) = \sin(mx)$, $m \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_m| = 1$$

còn

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_m(\cdot,t)| = e^{m^2(T-t)} \to \infty, m \to \infty, t \in (0,T).$$

1.2.2 Tính chính quy

Trong mục trước ta đưa ra một nghiệm cho bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt. Nhìn chung nghiệm đưa ra rất tốt, chẳng hạn nó khả vi vô hạn ngay khi $t > 0$ và điều kiện ban đầu chỉ cần bị chặn. Mục này sẽ quan tâm đến câu hỏi: liệu tính trơn đó có phải là tính chất chung của các nghiệm của phương trình truyền nhiệt?
Để nghiên cứu tính trơn ta sử dụng hàm $\tilde{K}_\epsilon$. Trước hết ta nhắc lại hàm này. Cố định $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \epsilon > 0$

$$\tilde{K}_\epsilon(y,s) = K(x-y, t-s), (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, t).$$

Lấy D là miền bị chặn với biên thuộc lớp C^1 trong $\mathbb{R}^n \times (-\infty, t+\epsilon)$ và $u \in C^{2,1}(D) \cap C^1(\bar{D})$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt trong D. Khi đó

$$(u\tilde{K}_\epsilon)_s + \sum_{i=1}^{n} (u\tilde{K}_{\epsilon y_i} - \tilde{K}_\epsilon u_{y_i})_{y_i} = 0.$$

Áp dụng công thức dạng DIV cho miền D có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị $\nu = (\nu_y, \nu_t)$ và trường

$$(u\tilde{K}_{\epsilon y_1} - \tilde{K}_\epsilon u_{y_1}, \ldots, u\tilde{K}_{\epsilon y_n} - \tilde{K}_\epsilon u_{y_n}, u\tilde{K}_\epsilon)$$

ta được

$$\int_{\partial D} \Big(u(y,s)\partial_{\nu_y}\tilde{K}_\epsilon(y,s) - \tilde{K}_\epsilon(y,s)\partial_{\nu_y} u(y,s) \Big) dS_{y,s} + \\ + \int_{\partial D} u(y,s)\tilde{K}_\epsilon(y,s)\nu_s dS_{y,s} = 0. \tag{1.6}$$

Với mỗi $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, R > 0$, ký hiệu trụ

$$Q_R(x_0,t_0) = B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0].$$

Trong trường hợp $x_0 = 0, t_0 = 0$ ta viết $Q_R = Q_R(0,0)$.
Sử dụng (1.6) ta có các kết quả về tính chính của nghiệm của phương trình truyền nhiệt như sau:

Định lý 1.7. *Cho $u \in C^{2,1}(Q_R(x_0,t_0)), R > 0, (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình $u_t - \Delta_x u = 0$ trong $Q_R(x_0,t_0)$. Khi đó $u \in C^\infty(Q_R(x_0,t_0))$.*

Chứng minh. Bằng cách dịch chuyển và co giãn ta có thể giả sử $x_0 = 0$, $t_0 = 0, R = 1$. Lấy $(x,t) \in Q_1$. Để chứng minh tính trơn của u ta sẽ chứng minh u trơn tại mỗi điểm (x,t).
Có $(x,t) \in Q_1$ nên có $r > \max\{|x|, -t\}$ để $(x,t) \subset \bar{B}_r \times [t,-r] \subset Q_1$. Lưu ý có thể chọn r chung khi (x,t) thay đổi trong một tập compact.
Sử dụng đẳng thức (1.6) với $D = B_r \times (t,-r)$ có biên ∂D gồm

- đáy trên $B_r \times \{t\}$ có pháp tuyến ngoài đơn vị $(\nu_y, \nu_s) = (0,1)$,
- đáy dưới $B_r \times \{-r\}$ có pháp tuyến ngoài đơn vị $(\nu_y, \nu_s) = (0,-1)$,
- mặt xung quanh $\partial B_r \times [-r,t]$ có pháp tuyến ngoài đơn vị $(\nu_y, \nu_s) = (\nu_y, 0)$.

Khi đó (1.6) trở thành

$$\int_{-r}^{t} ds \int_{\partial B_r} \Big(u(y,s)\partial_{\nu_y}\tilde{K}_\epsilon(y,s) - \tilde{K}_\epsilon(y,s)\partial_{\nu_y}u(y,s)\Big)\, dS_y + \\ + \int_{B_r} u(y,t)\tilde{K}_\epsilon(y,t)dy - \int_{B_r} u(y,-r)\tilde{K}_\epsilon(y,-r)dy = 0.$$

Từ tính chất của $\tilde{K}_\epsilon$, và B_r chứa x ta có

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{B_r} u(y,t)\tilde{K}_\epsilon(y,t)dy = u(x,t)$$

nên từ trên, cho $\epsilon \to 0^+$, ta được

$$u(x,t) = \int_{B_r(x)} u(y,-r)K(x-y,t+r)dy + \\ + \int_{-r}^{t} ds \int_{\partial B_r} \big[K(x-y,t-s)\partial_{\nu_y}u(y,s) - u(y,s)\partial_{\nu_y}K(x-y,t-s)\big]\, dS_y. \tag{1.7}$$

Có $u \in C^1(\bar{B}_r \times [t,-r])$. Lại có

- do $t + r > 0$ nên $K(z,t+r)$ trơn theo $(z,t) \in \mathbb{R}^n \times (-r,\infty)$,
- do $x \in B_r, y \in \partial B_r$ nên $K(x-y,\tau)$ trơn theo $(x,\tau) \in B_r \times [0,\infty)$.

Từ đó ta sẽ dẫn đến tính trơn của $u(x,t)$. □

Biểu diễn tích phân (1.7) của nghiệm của phương trình truyền nhiệt chưa đủ để ta đánh giá. Lý do tính kỳ dị của nghiệm cơ bản vẫn xuất hiện trong tích phân. Để làm mất tính kỳ dị này ta cần làm trơn những chỗ kỳ dị này. Khi đó ta có đánh giá gradient sau:

Định lý 1.8. *Cho $u \in C^{2,1}(Q_R(x_0,t_0)), R > 0, (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình $u_t - \Delta_x u = 0$ trong $Q_R(x_0,t_0)$. Khi đó*

$$|\nabla_x u(x_0,t_0)| \leq \frac{C}{R} \sup_{Q_R(x_0,t_0)} |u|$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc vào n.

Chứng minh. Giống Định lý 1.7, ta giả sử $x_0 = 0, t_0 = 0, R = 1$. Lấy $(x,t) \in Q_{1/4}$ và hàm $\varphi \in C^\infty(Q_1)$ thỏa mãn

$$\varphi(x) = 1 \text{ khi } x \in Q_{1/2}, \varphi(x) = 0 \text{ khi } x \notin Q_{3/4}.$$

Làm tương tự 1.6, thay $\tilde{K}_\epsilon$ bởi $v = \tilde{K}_\epsilon$ và miền $D = B_{5/6} \times (-5/6, t)$. Khi đó:

- trường $F = (uv_{y_1} - vu_{y_1}, \ldots, uv_{y_n} - vu_{y_n}, uv)$ có

$$\operatorname{div} F = u(v_s - \Delta_y v)$$

- biên ∂D gồm:

- đáy trên $B_{5/6} \times \{t\}$ có pháp tuyến ngoài đơn vị $(\nu_y, \nu_s) = (0,1)$,

- đáy dưới $B_{5/6} \times \{-5/6\}$ có $\varphi(y, -5/6) = 0$,

- mặt xung quanh $\partial B_{5/6} \times [-5/6, t]$ có $\varphi = 0$ trong một lân cận của mặt xung quanh.

Từ công thức dạng DIV ta thu được

$$\int_{B_{5/6}\times(-5/6,t)} u(y,s)(\partial_s + \Delta_y)(\varphi \tilde{K}_\epsilon)(y,s)dyds = \int_{B_{5/6}} (\varphi u)(y,t)\tilde{K}_\epsilon(y,t)dy. \tag{1.8}$$

Lại từ tính chất của $\tilde{K}_\epsilon, \varphi$ và $(x,t) \in Q_{1/4}$ nên

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B_{5/6}} (\varphi u)(y,t)\tilde{K}_\epsilon(y,t)dy = \varphi(x,t)u(x,t) = u(x,t).$$

Tính toán, chú ý $(\partial_s - \Delta_y)\tilde{K}_\epsilon = 0$ có

$$(\partial_s - \Delta_y)(\varphi\tilde{K}_\epsilon) = (\varphi_s - \Delta_y\varphi)\tilde{K}_\epsilon + 2\nabla_y\varphi \cdot \nabla\tilde{K}_\epsilon$$

Chú ý thêm φ là hằng số ngoài $Q_{3/4} \setminus Q_{1/2}$ có

$$(\partial_s - \Delta_y)(\varphi\tilde{K}_\epsilon) = 0 \text{ ngoài } Q_{3/4} \setminus Q_{1/2}.$$

Thay lại (1.8), cho $\epsilon \to 0^+$, ta được

$$u(x,t) = \int\limits_{B_{\frac{3}{4}}\times(-\frac{9}{16},t)\setminus Q_{\frac{1}{2}}} u(y,s)((\varphi_s(y,s) - \Delta_y\varphi(y,s))K(x-y,t-s) + \\ + 2\nabla_y\varphi(y,s)\cdot\nabla K(x-y,t-s))dyds.$$

Có φ khả vi vô hạn, có các đạo hàm riêng bị chặn trong $Q_{3/4}$, còn $K(x-y,t-s)$ khả vi vô hạn, có các đạo hàm riêng bị chặn theo (x,y,t,s) khi $(x,t) \in Q_{1/4}$ còn $(y,s) \in B_{3/4} \times (-9/16,t) \setminus Q_{1/2}$. Từ đó ta có đánh giá gradient cần chứng minh. □

Tiếp theo ta có đánh giá cho đạo hàm riêng mọi cấp như sau:

Định lý 1.9. *Cho $u \in C^{2,1}(Q_R(x_0,t_0)), R > 0, (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình $u_t - \Delta_x u = 0$ trong $Q_R(x_0,t_0)$. Khi đó*

$$|\partial_t^k \nabla_x^m u(x_0,t_0)| \le \frac{C^{m+2k}}{R^{m+2k}} n^k e^{m+2k-1}(m+2k)! \sup_{Q_R(x_0,t_0)} |u|$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc vào n.

Chứng minh. Để chứng minh kết quả này ta chú ý $\partial_t^k u = \Delta^k u$, còn lại chứng minh tương tự như hàm điều hòa. □

Từ kết quả này ta dẫn đến tính giải tích theo biến x của nghiệm của phương trình truyền nhiệt như sau:

Định lý 1.10. *Cho $u \in C^{2,1}(Q_R(x_0,t_0)), R > 0, (x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình $u_t - \Delta_x u = 0$ trong $Q_R(x_0,t_0)$. Khi đó $u(\cdot,t)$ giải tích trong $B_R(x_0)$ với mỗi $t \in (t_0 - R^2, t_0)$. Hơn nữa $\partial_t^k u(\cdot,t), k \in \mathbb{Z}_+$, cũng là các hàm giải tích trong $B_R(x_0)$ với mỗi $t \in (t_0 - R^2, t_0)$.*

Chứng minh kết quả này không khác gì kết quả tương tự cho hàm điều hòa. Cần chú ý, ví dụ Tikhonov cho thấy nghiệm của phương trình truyền nhiệt nói chung không giải tích theo t.

1.2.3 Tính chất giá trị trung bình

Trong mục này ta chỉ ra nghiệm của phương trình truyền nhiệt có tính chất giá trị trung bình. Khác với phương trình Laplace ta có trung bình cầu, phương trình truyền nhiệt có trung bình trên cầu nhiệt. Cụ thể, với mỗi $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, r > 0$, ta định nghĩa cầu nhiệt tại (x,t), bán kính r như sau:

- Hình cầu nhiệt

$$E_r(x,t) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ s < t, \tilde{K}(y,s) > \frac{1}{r^n}\}$$

với $\tilde{K}(y,s) = K(x-y, t-s) = \dfrac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}$.

- Mặt cầu nhiệt

$$\partial E_r(x,t) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ s < t, \tilde{K}(y,s) = \frac{1}{r^n}\}.$$

Có thể thấy $E_r(x,t)$ có cực bắc (x,t), có thiết diện với mặt phẳng vuông góc với trục Ot tại s là hình cầu, tâm (x,s), bán kính

$$\left(4ns \ln\left(\frac{r}{\sqrt{4\pi s}}\right)\right)^{1/2},$$

phình dần ra khi s giảm cho đến lúc nó đạt cực đại tại $s = t - \frac{r^2}{4\pi e}$, tiếp đó nó thu dần về điểm $(x, t - \frac{r^2}{4\pi})$. Để đơn giản ký hiệu khi $(x,t) = (0,0)$ ta ký hiệu $E_r, \partial E_r$ lần lượt là hình cầu nhiệt, mặt cầu nhiệt tâm tại gốc, bán kính r. Khi đó dễ thấy

$$(x,t) \in E_r(x_0,t_0) \text{ khi và chỉ khi } ((x-x_0)/2, (t-t_0)/r^2) \in E_1.$$

Ta cần đến bổ đề tính toán sau:

Bổ đề 1.11.

$$\int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = 4.$$

Chứng minh. Dùng Fubini ta có

$$I = \int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2} dyds = \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{s^2} ds \int_0^{r(s)} dt \int_{S_t} |y|^2 dS_y,$$

với $r(s) = \left(4ns\ln\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)\right)^{1/2}$. Tính toán tiếp với chú ý diện tích mặt cầu đơn vị trong không gian $n-$chiều là $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, ta có

$$I = \frac{2\pi^{n/2}}{(n+2)\Gamma(n/2)}\int_0^{\frac{1}{4\pi}} s^{-2}\left(4ns\ln\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)\right)^{(n+2)/2} ds.$$

Đổi biến $\zeta = n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)$ ta được

$$I = \frac{2\pi^{n/2}}{(n+2)\Gamma(n/2)} \times \frac{4^{n/2+2}}{(4\pi)^{n/2}n}\int_0^{\infty} e^{-\zeta}\zeta^{n/2+1}d\zeta = 4.$$

□

Ta đến với tính chất trung bình hình cầu nhiệt sau:

Định lý 1.12. *Với $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, u \in C^{2,1}(E_r(x_0, t_0)) \cap C^1(\bar{E}_r(x_0, t_0))$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong $E_r(x_0, t_0)$. Khi đó*

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n}\int_{E_r(x_0,t_0)} u(y, s)\frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}dyds.$$

Chứng minh. Bằng phép dịch chuyển và co giãn

$$v(x, t) = u\left(r(x - x_0), r^2(t - t_0)\right)$$

ta có thể giả sử $x_0 = 0, t_0 = 0, r = 1$.
Xét hàm

$$\psi(r) = \frac{1}{r^n}\int_{E_r} u(y, s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds = \int_{E_1} u(ry, r^2 s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds, 0 \le r \le 1.$$

Ta sẽ chứng minh $\psi(r)$ là hàm hằng theo r. Khi đó, từ Bổ đề 1.11 và cho $r \to 0^+$ ta có tính chất giá trị trung bình hình cầu nhiệt cần chứng minh.
Lấy đạo hàm

$$\begin{aligned}\psi'(r) =& \int_{E_1}\left(\sum_{i=1}^n y_i u_{y_i}(ry, r^2 s) + 2su_s(ry, r^2 s)\right)\frac{|y|^2}{s}dyds\\ =&\frac{1}{r^n}\int_{E_r}\left(\sum_{i=1}^n y_i u_{y_i}(y, s)\frac{|y|^2}{s} + 2u_s(y, s)\frac{|y|^2}{s}\right)dyds. \qquad (1.9)\end{aligned}$$

Đặt

$$\varphi(y,s) = -\frac{n}{2}\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\ln r, (y,s) \in \bar{E}_r$$

có

- $\varphi(y,s) = 0$ khi $(y,s) \in \partial E_r$,
- $\varphi_s(y,s) = -\dfrac{n}{2s} - \dfrac{|y|^2}{4s^2}, \varphi_{y_i}(y,s) = \dfrac{y_i}{2s}$ nên

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i u_{y_i}\frac{|y|^2}{s} + 2u_s\frac{|y|^2}{s} &= -\sum_{i=1}^n u_{y_i}y_i\left(4\varphi_s + \frac{2n}{s}\right) + 4u_s\sum_{i=1}^n y_i\varphi_{y_i}\\ &= 4\left(u_s(y\cdot\varphi) - \varphi_s(y\cdot\nabla u) - n\nabla u\cdot\nabla\varphi\right).\end{aligned}$$

Xét trường

$$F = (\varphi(y_1u_s - nu_{y_1}), \ldots, \varphi(y_nu_s - nu_{y_n}), -\varphi y\cdot\nabla u)$$

có

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F =& u_s(y\cdot\nabla\varphi) + \varphi(y\cdot\nabla u_s) + n\varphi u_s - n\varphi\Delta_y u - n\nabla u\cdot\nabla\varphi -\\ &- \varphi_s(y\cdot\nabla u) - \varphi(y\cdot\nabla u_s)\end{aligned}$$

mà $u_s - \Delta_y u = 0$ nên

$$\sum_{i=1}^n y_i u_{y_i}\frac{|y|^2}{s} + 2u_s\frac{|y|^2}{s} = 4\operatorname{div} F. \tag{1.10}$$

Sử dụng công thức dạng DIV cho trường F và miền E_r với chú ý $\varphi = 0$ trên ∂E_r nên

$$\int_{E_r}\operatorname{div} F(y,s)dyds = 0. \tag{1.11}$$

Từ (1.9)-(1.11) ta có điều phải chứng minh. □

Khác với hàm điều hòa, hai tính chất trung bình trong hình cầu và mặt cầu chuyển được qua nhau nhờ phép lấy đạo hàm và lấy tích phân, việc chuyển sang tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu nhiệt không đơn giản như thế.

Định lý 1.13. *Với $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, u \in C^{2,1}(E_r(x_0,t_0)) \cap C^1(\bar{E}_r(x_0,t_0))$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong $E_r(x_0,t_0)$. Khi đó*

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2r^n}\int_{\partial E_r(x_0,t_0)} u(y,s)\frac{|x_0-y|}{t_0-s}dyds.$$

Chứng minh. Tương tự như trong hình cầu nhiệt ta có thể giả sử $x_0 = 0, t_0 = 0, r = 1$. Lấy $\epsilon \in (0, \frac{1}{4\pi e})$, bán kính hình cầu thiết diện vuông góc với trục $0t$ tại ϵ trong hình cầu nhiệt E_1 xác định bởi

$$r_\epsilon = \left(4\pi\epsilon \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\right)\right)^{1/2}.$$

Tương tự (1.6), thay $\tilde{K}_\epsilon$ bởi $\bar{K}(x,t) = K(x,-t) - 1$ và miền

$$D = \{(x,t) : \ -\epsilon < t < -\frac{1}{4\pi}, K(x,-t) > 1\} \subset E_1$$

có

$$\int_{\partial D} \left(u(y,s)\partial_{\nu_y}\bar{K}(y,s) - \bar{K}(y,s)\partial_{\nu_y}u(y,s)\right) dS_{y,s} + \\ + \int_{\partial D} u(y,s)\bar{K}(y,s)\nu_s dS_{y,s} = 0.$$

Có $\partial D = \{(x,t) : \ -\epsilon \le t \le -\frac{1}{4\pi}, K(x,-t) = 1\} \cup \{(x,-\epsilon) : \ |x| < r_\epsilon\}$. Lại có

- khi $(y,s) \in S_{1\epsilon} = \{(x,t) : \ -\epsilon \le t \le -\frac{1}{4\pi}, K(x,-t) = 1\}$

$$\bar{K}(y,s) = 0, \partial_{\nu_y}\bar{K}(y,s) = \frac{|y|}{2s}K(y,-s) = \frac{|y|}{2s},$$

- khi $(y,s) \in S_{2\epsilon} = \{(x,-\epsilon) : \ |x| < r_\epsilon\}$

$$\bar{K}(y,-\epsilon) = K(y,\epsilon) - 1, \partial_{\nu_y}\bar{K}(y,-\epsilon) = 0, \nu_s = 1$$

nên

$$\int_{S_{1\epsilon}} u(y,s)\frac{|y|}{2s}dS_{y,s} = -\int_{B_{r_\epsilon}} (K(y,\epsilon) - 1)u(y,\epsilon)dy. \tag{1.12}$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ có

- $S_{1\epsilon} \to \partial E_1$ nên

$$\int_{S_{1\epsilon}} u(y,s)\frac{|y|}{2s}dS_{y,s} \to \int_{\partial E_1} u(y,s)\frac{|y|}{2s}dS_{y,s},$$

- $r_\epsilon \to 0^+$ nên

$$\int_{B_\epsilon} u(y,\epsilon)dy \to 0,$$

- $\dfrac{r_\epsilon^2}{\epsilon} \to +\infty$ nên

$$\int_{B_{r_\epsilon}} K(y,\epsilon)dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta|\le r_\epsilon/\sqrt{\epsilon}} e^{-|\eta|^2} d\eta \to 1.$$

Từ đây không khó để dẫn đến tính chất trung bình trên mặt cầu nhiệt. Chi tiết xem như bài tập. □

Từ tính chất giá trị trung bình ta có các kết quả về nguyên lý cực đại sau:

Định lý 1.14. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, T > 0$ ký hiệu $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$. Giả sử $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ là nghiệm của $u_t - \Delta_x u = 0$ trong Ω_T. Khi đó u đạt GTLN trên biên parabolic*

$$\partial_p \Omega_T = \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]$$

nghĩa là $\max\limits_{\partial_p\Omega_T} u = \max\limits_{\bar{\Omega}_T} u$. Hơn nữa, nếu u đạt GTLN tại $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ thì u là hàm hằng trong $\bar{\Omega}_t$.

1.3 Nguyên lý cực đại

1.3.1 Nguyên lý cực đại yếu

Trong mục trước ta đã nói đến biên parabolic của trụ $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, xác định bởi

$$\partial_p \Omega_T = \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T].$$

Với tập $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, biên parabolic của nó xác định bởi:
$\partial_p D$ gồm tất cả các điểm $(x,t) \in \partial D$ sao cho với bất kỳ $r > 0$ ta đều có

$$Q_r(x,t) \setminus D \neq \emptyset.$$

Miền $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ được gọi là miền parabolic nếu

$$\partial D \setminus \partial_p D \subset D.$$

Ta có nguyên lý cực đại yếu cho nghiệm dưới của phương trình truyền nhiệt trong D như sau:

Định lý 1.15. *Cho D là miền parabolic chặn trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Giả sử $u \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta_x u \leq 0 \text{ trong } D.$$

Khi đó u đạt GTLN trên biên parabolic $\partial_p D$, nghĩa là

$$\max_{\partial_p D} u = \max_{\bar{D}} u.$$

Để chứng minh nguyên lý cực đại yếu này ta cần đến bổ đề sau.

Bổ đề 1.16. *Cho D là miền parabolic trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Giả sử $u \in C^{2,1}(D)$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta_x u < 0 \text{ trong } D.$$

Khi đó u không thể đạt cực đại địa phương trong D.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là giả sử u đạt cực đại địa phương tại $(x_0, t_0) \in D$. Do $D = intD \cup (\partial D \setminus \partial_p D)$ nên có hai trường hợp sau xảy ra.
TH1: $(x_0, t_0) \in intD$**.** Khi đó $u_t(x_0, t_0) = 0$ và $\nabla^2 u(x_0, t_0)$ là ma trận nửa xác định âm. Do đó

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0.$$

Điều này trái với giả thiết.
TH2: $(x_0, t_0) \in \partial D \setminus \partial_p D$ có $r > 0$ để $Q_r(x_0, t_0) \subset D$. Khi đó Khi đó $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ và $\nabla^2 u(x_0, t_0)$ là ma trận nửa xác định âm. Do đó

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0.$$

Điều này trái với giả thiết. □

Chứng minh nguyên lý cực đại yếu. Với mỗi $\epsilon > 0$ xét

$$u_\epsilon(x, t) = u(x, t) - \epsilon t$$

có

- $u_\epsilon \in C^{2,1}(D)$,
- $u_{\epsilon t} - \Delta_x u_\epsilon = u_t - \Delta_x u - \epsilon < 0$ trong D.

Áp dụng Bổ đề 1.16, u_ϵ không có cực đại địa phương trong D. Lại do u_ϵ là hàm liên tục trên tập compact $\bar{D}$ nên u_ϵ chỉ có thể đạt GTLN trên biên parabolic $\partial_p D$, nghĩa là

$$\max_{\partial_p D} u_\epsilon = \max_{\bar{D}} u_\epsilon.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ ta có nguyên lý cực đại cần chứng minh. □

Tương tự cách tiếp cận trên ta mở rộng nguyên lý cực đại yếu cho nghiệm dưới của phương trình

$$Lu = u_t - \Delta_x u + cu = f.$$

Định lý 1.17. *Cho D là miền parabolic bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, hàm $c \in C(D)$ là hàm không âm. Giả sử $u \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta_x u + cu \leq 0 \text{ trong } D.$$

Khi đó u đạt GTLN không âm trên biên parabolic $\partial_p \Omega$, nghĩa là

$$\max_{\partial_p D} u^+ = \max_{\bar{D}} u,$$

trong đó $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Nới rộng điều kiện cho hàm c ta có kết quả sau:

Định lý 1.18. *Cho D là miền parabolic bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, hàm $c \in C(D)$ thỏa mãn $c \geq -c_0$ với c_0 là hằng số không âm. Giả sử $u \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_x u + cu \leq & 0 \text{ trong } D, \\ u \leq & 0 \text{ trên } \partial_p D. \end{aligned}$$

Khi đó $u \leq 0$ trong D.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1.17 cho hàm $v = e^{-c_0 t} u$. Chi tiết xem như bài tập. □

Từ Định lý trên ta có nguyên lý so sánh:

Hệ quả 1.19. *Cho D là miền parabolic bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, hàm $c \in C(D)$ thỏa mãn $c \geq -c_0$ với c_0 là hằng số không âm. Giả sử $u, v \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_x u + cu \leq & v_t - \Delta_x v + cv \text{ trong } D, \\ u \leq & v \text{ trên } \partial_p D. \end{aligned}$$

Khi đó $u \leq v$ trong D.

Sử dụng Định lý 1.15 ta sẽ chứng minh nguyên lý cực đại yếu cho miền vô hạn sau:

Định lý 1.20. *Cho $T > 0$, có thể $T = +\infty, u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Giả sử $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_x u \leq & 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x,t) \leq & M e^{\lambda |x|^2} \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x,0) = & u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

trong đó M, λ là các hằng số dương. Khi đó

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Chứng minh. **TH1:** $0 < T < \dfrac{1}{4\lambda}$. Lấy $\alpha \in (\lambda, \frac{1}{4T})$. Ta cần đến hàm G_α xác định bởi

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-4\alpha t)} e^{\frac{\alpha |x|^2}{1-4\alpha t}}, 0 < t < \frac{1}{4\alpha}.$$

Cố định $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Với mỗi $\epsilon > 0$ xét hàm

$$v_\epsilon(y,t) = u(y,t) - \epsilon G_\alpha(x-y,t).$$

Dễ kiểm tra

- $v_{\epsilon t} - \Delta_x v_\epsilon \leq 0$ trong $\mathbb{R}^n \times (0,T)$,
- $v(x,0) \leq f(x)$ trong $\mathbb{R}^n$,

- với $|y| = R > |x|$, từ giả thiết về độ tăng của u

$$v_\epsilon(y,t) \le Me^{\lambda R^2} - \epsilon e^{\alpha(R-|x|)^2}, 0 < t < T,$$

mà $\alpha > \lambda > 0$ và $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nên với R đủ lớn có

$$v_\epsilon(y,t) < \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Áp dụng Định lý 1.15 cho hàm v trong $B_R \times (0,T)$ ta có

$$\max_{\bar{B}_R \times [0,T]} v_\epsilon \le \max_{\partial_p B_R \times (0,T)} v_\epsilon \le \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Lại có $(x,t) \in B_R \times (0,T)$ nên

$$v_\epsilon(x,t) = u(x,t) - \frac{\epsilon}{1-4\alpha t} \le \sup_{\mathbb{R}^n} u_0, 0 < t < T.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ ta có nguyên lý cực đại yếu khi $T < 1/(4\lambda)$.

TH2: $T > 0$ **bất kỳ, kể cả khi** $T = +\infty$**.** Lấy $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Do $t > 0$ hữu hạn nên có số tự nhiên k để

$$(k-1)T_0 < t \le kT_0, T_0 = \frac{1}{8\lambda}.$$

Sử dụng kết quả của TH1 ta có

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u(x, jT_0) \le \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,(j-1)T_0), 1 \le j \le k-1$$

và

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [(k-1)T_0, kT_0]} u \le \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,(k-1)T_0).$$

Từ đây ta có ngay nguyên lý cực đại yếu cho trường hợp tổng quát. □

1.3.2 Nguyên lý cực đại mạnh

Bổ đề 1.21. *Cho* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, R > 0, T > 0$ *ký hiệu* $Q = B_R(x_0,t_0) \times (t_0 - T, t_0]$. *Giả sử* $c \in C(\bar{Q}), u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ *thỏa mãn*

$$u_t - \Delta_x u + cu \ge 0 \text{ trong } Q.$$

Nếu $u \geq 0$ trong Q và

$$u(x_0, t_0 - T) > 0$$

thì

$$u(x,t) > 0, (x,t) \in Q.$$

Chứng minh. Với mỗi $t_1 \in (t_0 - T, t_0]$ ta cần chứng minh

$$u(x, t_1) > 0, x \in B_R(x_0).$$

Thật vậy, bằng cách dịch chuyển ta có thể giả sử $x_0 = 0, t_1 = 0$. Khi đó $t_0 - T < 0$ nên có $\alpha > 0$ để $t_0 - T = -\alpha R^2$. Đặt $D = B_R \times (-\alpha R^2, 0]$. Từ giả thiết ta có $u \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ thỏa mãn:

- $u_t - \Delta u + cu \geq 0$ trong D,
- $u \geq 0$ trong D,
- $u(0, -\alpha R^2) > 0$.

Khi đó có các số $m > 0, \epsilon \in (0,1)$ sao cho

$$u(x, -\alpha R^2) \geq m, x \in \bar{B}_{\epsilon R}.$$

Đặt

$$D_0 = \{(x,t) \in D : \ |x|^2 - \frac{1-\epsilon^2}{\alpha} t < R^2\}.$$

Phần tiếp theo ta sẽ xây dựng hàm $\omega \in C^{2,1}(D_0) \times C(\bar{D}_0)$ thỏa mãn

- $\omega_t - \Delta\omega + c\omega \leq 0$ trong D_0,
- $\omega = 0$ trên mặt xung quanh $\{(x,t) \in \partial D_0 : \ |x|^2 - \dfrac{1-\epsilon^2}{\alpha} t = R^2\}$ và $\omega \leq m$ ở đáy dưới $\{(x,t) \in \partial D_0 : \ t = -\alpha R^2\}$,
- $\omega > 0$ trong D_0.

Khi đó

- D_0 là miền parabolic bị chặn,

- $c \in C(\bar{Q})$ nên có hằng số dương c_0 để $c \geq -c_0$ trong Q,
- $\omega_t - \Delta\omega + c\omega \leq u_t - \Delta u + cu$ trong D_0,
- $\omega \leq u$ trên $\partial_p D_0$

nên theo Hệ quả 1.19 ta có

$$u \geq \omega \text{ trong } D_0$$

nghĩa là ta có điều phải chứng minh.
Hàm ω được xây dựng như sau

$$\omega = C\omega_1^{-\beta}\omega_2^2$$

trong đó

$$\begin{aligned}\omega_1(t) =& \frac{1-\epsilon^2}{\alpha}t + R^2,\\ \omega_2(x,t) =& \frac{1-\epsilon^2}{\alpha}t + R^2 - |x|^2.\end{aligned}$$

Khi đó ta có các kết luận sau:

- Do $\epsilon R^2 \leq \omega_1 \leq R^2, \omega_2 > 0$ trong D_0 nên

$$\omega > 0 \text{ trong } D_0.$$

- Trên mặt xung quanh $\{(x,t) \in \partial D_0 : \ |x|^2 - \dfrac{1-\epsilon^2}{\alpha}t = R^2\}$ có $\omega_2 = 0$ nên $\omega = 0$.
- Trên đáy $\{(x,t) \in \partial D_0 : \ t = -\alpha R^2\}$ có

$$\omega \leq C(\epsilon R)^{4-2\beta}$$

  nên ta chọn $C = m(\epsilon R)^{2\beta-4}$.

- Với chú ý $\omega_1 - \omega_2 = |x|^2$ có

$$\begin{aligned}\omega_t - \Delta\omega + c\omega =& -\omega_1^{-\beta-1}\Bigg(\left(\frac{\beta(1-\epsilon^2)}{\alpha} - c\omega_1\right)\omega_2^2 +\\ &+ \left(\frac{2(1-\epsilon^2)}{\alpha} + 4n + 8\right)\omega_1\omega_2 + 8\omega_1^2\Bigg).\end{aligned}$$

Do $c \in C(\bar{Q}), \epsilon \in (0,1)$, nên có β đủ lớn dạng toàn phương

$$\left(\frac{\beta(1-\epsilon^2)}{\alpha} - R^2 \max_{\bar{Q}} |c|\right)\omega_2^2 + \left(\frac{2(1-\epsilon^2)}{\alpha} + 4n + 8\right)\omega_1\omega_2 + 8\omega_1^2$$

xác định dương. Lại do $\omega_1 \leq R^2$ trong D_0 nên với β được chọn như vậy ta có

$$\omega_t - \Delta\omega + c\omega \leq 0 \text{ trong } D_0.$$

Ta đã hoàn thành chứng minh. □

Chú ý rằng, từ chứng minh trên ta có đánh giá quan trọng

$$u(x,0) \geq \epsilon^{2\beta-4}\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)\min_{B_\epsilon} u(x, -\alpha R^2), x \in B_R.$$

Giờ ta có thể chứng minh nguyên lý cực đại mạnh.

Định lý 1.22. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, T > 0$ ký hiệu $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$. Giả sử $c \in C(\Omega_T), c \geq 0$, và $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \text{ trong } \Omega_T.$$

Nếu có điểm $(x_1, t_1) \in \Omega_T$ sao cho

$$u(x_1, t_1) = \sup_{\Omega_T} u(x,t) \geq 0$$

thì

$$u(x,t) = u(x_1, t_1), (x,t) \in \Omega_{t_1}.$$

Chứng minh. Đặt $M = \sup_{\Omega_T} u \geq 0, v = M - u$ có $v \geq 0$ trong Ω_T và $v(x_1, t_1) = 0$. Do $c \geq 0$ trong Ω_T nên

$$v_t - \Delta v + cv = -(u_t - \Delta u + cu) + cM \geq 0 \text{ trong } \Omega_T.$$

Lấy $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, t_1)$ ta sẽ chứng minh

$$u(x_0, t_0) = M \text{ hay } v(x_0, t_0) = 0.$$

bằng phản chứng, nghĩa là giả sử $u(x_0, t_0) < M$ hay $v(x_0, t_0) > 0$ sẽ dẫn đến điều mâu thuẫn. Khi đó dùng tính liên tục của u ta sẽ có điều phải chứng minh.
Do Ω liên thông nên có đường liên tục $\gamma : [0, 1] \to \Omega, \gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Từ tính compact ta có

$$d(\partial\Omega, \gamma(s)) \geq d > 0, s \in [0, 1].$$

Lại từ tính compact có hữu hạn điểm

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = 1$$

sao cho $d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) < R = d/2, i = 0, \ldots, N-1$. Lấy

$$T_i = t_0 + i(t_1 - t_0)/N, i = 0, 1, \ldots, N,$$

có các trụ

$$B_R(\gamma(s_i)) \times (T_i, T_{i+1}] \subset \Omega_T, i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

và

$$(\gamma(s_{i+1}), T_{i+1}) \in B_R(\gamma(s_i)) \times \{T_{i+1}\}, i = 0, 1 \ldots, N-1.$$

Do đó áp dụng Bổ đề 1.21 lần lượt cho các trụ $B_R(\gamma(s_i)) \times (T_i, T_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, và xuất phát điểm

$$v(\gamma(s_0), T_0) = v(x_0, t_0) > 0$$

ta có $v(x_1, t_1) = v(\gamma(s_N), T_N) > 0$. Điều này trái với giả thiết $v(x_1, t_1) = 0$ hay ta đã hoàn thành chứng minh. □

Ta cũng có bổ đề Hopf cho phương trình truyền nhiệt.

Bổ đề 1.23. *Cho* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, R > 0, \eta > 0$ *đặt*

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ |x - x_0|^2 + \eta|t - t_0| < R^2, t \leq t_0\}.$$

Giả sử $c \in C(\bar{D}), c \geq 0, u \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ *thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u + cu \leq 0 \text{ trong } D.$$

Nếu có $\tilde{x} \in B_R(x_0)$ *sao cho*

- $u(\tilde{x}, t_0) \geq 0$,
- $u(x,t) \leq u(\tilde{x}, t_0), (x,t) \in D$,
- $u(x,t) < u(\tilde{x}, t_0), (x,t) \in D, x \in \bar{B}_{R/2}(x_0)$.

và $\nabla_x u$ *liên tục đến* $(\tilde{x}, t_0)$ *thì*

$$\nu \cdot \nabla_x u(\tilde{x}, t_0) > 0$$

với $\nu = (\tilde{x} - x_0)/|\tilde{x} - x_0|$.

Chứng minh. Bằng phép dịch chuyển ta có thể giả sử $x_0 = 0, t_0 = 0$. Khi đó

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ |x|^2 - \eta t < R^2, t \leq 0\}.$$

Đặt

$$D_0 = \{(x,t) \in D : \ |x| > R/2\}.$$

Xét các hàm

$$\begin{aligned} \omega(x,t) =& e^{-\alpha(|x|^2 - \eta t)} - e^{-\alpha R^2}, \\ v(x,t) =& u(x,t) - u(\tilde{x}, 0) + \epsilon\omega(x,t), \end{aligned}$$

trong đó các hằng số dương α, ϵ sẽ chọn sau.
Do $c \in C(\bar{B})$ nên có α đủ lớn để

$$\alpha^2 R^2 - 2n\alpha - \eta\alpha - \max_{\bar{B}} |c| \geq 0.$$

Với α được chọn như vậy, và chú ý $c \geq 0$ ta có

$$\omega_t - \Delta\omega + c\omega = -(4\alpha^2|x|^2 - 2n\alpha - \eta\alpha - c)e^{-\alpha(|x|^2 - \eta t)} - ce^{-\alpha R^2} \leq 0$$

khi $(x,t) \in D_0$. Khi đó từ giả thiết $u_t - \Delta u + cu \geq 0$ và $u(\tilde{x}, 0) \geq 0$ có

$$v_t - \Delta v + cv = u_t - \Delta u + cu + \epsilon(\omega_t - \Delta\omega + c\omega) - cu(\tilde{x}, 0) \leq 0$$

trong D_0.
Ta lại có:

- Trên mặt ngoài
$$\Sigma_1 = \{(x,t) \in \partial D_0 : \ |x|^2 - \eta t = R^2\}$$
có $\omega(x,t) = 0$ nên
$$v(x,t) = u(x,t) - u(\tilde{x},0) \leq 0.$$

- Trên mặt trong
$$\Sigma_2 = \{(x,t) \in \partial D_0 : \ |x| = R/2\}$$
có $u(x,t) - u(\tilde{x},0) < 0$ nên
$$\epsilon = \max_{\Sigma_2}(u(\tilde{x},0) - u(x,t)) > 0.$$
Khi đó
$$v(x,t) \leq u(x,t) - u(\tilde{x},0) + \epsilon \leq 0, (x,t) \in \Sigma_2.$$

Sử dụng nguyên lý cực đại yếu cho v ta được
$$v(x,t) \leq 0, (x,t) \in D_0.$$

Do $v(\tilde{x},0) = 0$ nên
$$\nu \cdot \nabla v(\tilde{x},0) \geq 0 \text{ hay } \nu \cdot \nabla u(\tilde{x},0) \geq 2\alpha\epsilon R e^{-\alpha R^2}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

1.3.3 Đánh giá tiên nghiệm

Giống như hàm điều hòa, dưới đây ta sẽ sử dụng nguyên lý cực đại để dẫn đến đánh giá tiên nghiệm.

Định lý 1.24. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, T > 0$ ký hiệu $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, và c là hàm liên tục trên Ω_T với $c \geq -c_0, c_0$ là hằng số không âm. Giả sử $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ thỏa mãn*
$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu =& f \ \textit{trong } \Omega_T. \\ u(\cdot,0) =& u_0 \ \textit{trên } \Omega, \\ u =& \varphi \ \textit{trên } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}_T), u_0 \in C(\bar{\Omega})$ *và* $\varphi \in C(\partial\Omega \times [0,T])$. *Khi đó*

$$\sup_{\Omega_T} |u| \leq e^{c_0 T} \left(\max \left\{ \sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial \times (0,T)} |\varphi| \right\} + T \sup_{\Omega_T} |f| \right).$$

Chứng minh. Đặt

$$F = \sup_{\Omega_T} |f|, \quad B = \max \left\{ \sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |\varphi| \right\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (\pm u)_t - \Delta(\pm u) + c(\pm u) &= \pm f \leq F \text{ trong } \Omega_T, \\ \pm u(\cdot, 0) &= \pm u_0 \leq B \text{ trên } \Omega, \\ \pm u &= \pm \varphi \leq B \text{ trên } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

Xét hàm

$$v(x,t) = e^{c_0 t}(B + Ft).$$

Do $c + c_0 \leq 0$ trong Ω_T và $c_0 \geq 0$ nên

$$v_t - \Delta v + cv = (c + c_0)v + e^{c_0 t} F \geq F \geq u_t - \Delta(\pm u) + c(\pm u) \text{ trong } \Omega_T.$$

Ngoài ra ta có

$$v \geq B \geq (\pm u) \text{ trên } \partial_p \Omega_T.$$

Sử dụng nguyên lý so sánh ta có

$$|u| \leq v \text{ trong } \Omega$$

hay ta đã chứng minh xong ước lượng tiên nghiệm. □

Tiếp theo ta đưa ra đánh giá tiên nghiệm cho bài toán giá trị ban đầu

Định lý 1.25. *Cho* c *là hàm liên tục trên* $\mathbb{R}^n \times (0,T], c \geq -c_0, c_0$ *là hằng số không âm. Giả sử* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *là nghiệm bị chặn của*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \text{ trên } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

với các hàm bị chặn $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T]), u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$. *Khi đó*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |u| \leq e^{c_0 T} \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |u_0| + T \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |f| \right).$$

Nguyên lý cực đại chỉ áp dụng được cho miền bị chặn nên khi sử dụng nguyên lý cực đại cho bài toán giá trị ban đầu ta cần đến dáng điệu ở vô cùng của nghiệm. Cụ thể, với Định lý 1.25 ta cần đến tính bị chặn.

Chứng minh. Đặt

$$F = \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |f|, \quad B = \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|, M = \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |u|.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (\pm u)_t - \Delta(\pm u) + c(\pm u) &= \pm f \leq F \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ \pm u(\cdot, 0) &= \pm u_0 \leq B \text{ trên } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Xét hàm

$$v(x,t) = e^{c_0 t}(B + Ft) + v_R(x,t),$$

trong đó v_R sẽ chọn sao cho

$$\begin{aligned} v_{Rt} - \Delta v_R + c v_R \geq& 0 \text{ trong } B_R \times (0,T], \\ v_R(\cdot, 0) \geq& 0 \text{ trên } B_R, \\ v_R \geq& M \text{ trên } \partial B_R \times (0,T]. \end{aligned}$$

Khi đó do $c + c_0 \geq 0, e^{c_0 t} \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v + cv \geq& F \geq (\pm u)_t - \Delta(\pm u) + c(\pm u) \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ v(\cdot, 0) \geq& B \geq \pm u(\cdot, 0) \text{ trên } B_R, \\ v \geq& M \geq \pm u \text{ trên } \partial B_R \times (0,T]. \end{aligned}$$

Sử dụng nguyên lý so sánh ta có

$$|u| \leq v \text{ trong } B_R \times (0,T].$$

Hàm $v_R(x,t)$ cần tìm

$$v_R(x,t) = \frac{M}{R^2} e^{c_0 t}(2nt + |x|^2).$$

Cố định $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$. Lấy $R > |x|$ có

$$|u(x,t)| \leq v(x,t) = e^{c_0 t}(B + Ft) + \frac{M}{R^2} e^{c_0 t}(2nt + |x|^2).$$

Cho $R \to \infty$ ta có ước lượng tiên nghiệm cần chứng minh. □

Trong Định lý 1.25 nếu thay $f = 0, c = 0$, ta có thể nới rộng giả thiết bị chặn của không gian nghiệm bởi độ tăng mũ và thời gian T có thể ra vô cùng bằng cách dùng 1.20.

Định lý 1.26. *Giả sử $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, $T > 0$ hữu hạn hoặc $T = +\infty$, là nghiệm của*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(\cdot,0) =& u_0 \text{ trên } \mathbb{R}^n, \\ |u(x,t)| \leq& M e^{A|x|^2}, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \end{aligned}$$

với $M < A$ là các hằng số dương, $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ bị chặn. Khi đó

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |u| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|.$$

1.3.4 Đánh giá gradient

Giống như hàm điều hòa, ta dùng biểu diễn tích phân (công thức Green, tích chất giá trị trung bình) để đưa ra đánh giá gradient. Cách tiếp cận của S. Bernstein dùng nguyên lý cực đại để đưa ra đánh giá gradienr cho hàm điều hòa cũng sử dụng được cho phương trình truyền nhiệt. Với $r > 0$, nhắc lại ký hiệu $Q_r = B_1 \times (-r^2, 0]$.

Định lý 1.27. *Cho $u \in C^{2,1}(Q_1) \cap C(\bar{Q}_1)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt trong Q_1. Khi đó*

$$\sup_{Q_{1/2}} |\nabla_x u| \leq C \sup_{\partial_p Q_1} |u|,$$

trong đó hằng số dương C chỉ phụ thuộc số chiều n.

Chứng minh. Lấy $\eta \in C^\infty(Q_1)$ sao cho $\eta = 1$ trong $Q_{1/2}$, và $\eta = 0$ ngoài $Q_{3/4}$. Ta sẽ tìm hằng số dương α để

$$(\partial_t - \Delta)(\eta^2|\nabla_x u|^2 + \alpha u^2) \leq 0 \text{ trong } Q_1. \tag{1.13}$$

Lại có $\eta^2|\nabla_x u|^2 + \alpha u^2 \geq 0$ trong $\bar{Q}_1$, nên theo Định lý 1.17 ta có

$$\max_{\bar{Q}_1}(\eta^2|\nabla_x u|^2 + \alpha u^2) \leq \max_{\partial_p Q_1}(\eta^2|\nabla_x u|^2 + \alpha u^2).$$

Từ tính chất của η ta có đánh giá gradient cần chứng minh. Ta còn phải chứng minh (1.13).

Ta tính toán lần lượt như sau:

- $(\partial_t - \Delta)(\eta^2) = 2\eta(\partial_t - \Delta)\eta - 2|\nabla_x \eta|^2$.
- $(\partial_t - \Delta)(u^2) = 2u(\partial_t - \Delta)u - 2|\nabla_x u|^2 = -2|\nabla_x u|^2$.
- Công thức Bochner

$$(\partial_t - \Delta)(|\nabla_x u|^2) = -2|\nabla_x^2 u|^2 + 2\nabla_x u \cdot \nabla_x(u_t - \Delta u) = -2|\nabla_x^2 u|^2.$$

- Với $\varphi \in C_0^\infty(B_1), \varphi \geq 0$, có

$$(\partial_t - \Delta)(\varphi|\nabla_x u|^2) = |\nabla u_x|^2(\partial_t - \Delta)\varphi - 4\sum_{i,j=1}^n \varphi_{x_j} u_{x_i} u_{x_i x_j} - 2\varphi|\nabla_x^2 u|^2.$$

- Chọn $\varphi = \eta^2$ có $|\nabla_x \varphi|^2/\varphi = 4|\nabla_x \eta|^2$. Kết hợp với các tính chất ở trên ta có

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)(\eta^2|\nabla_x u|^2) \geq 2(\eta(\eta_t - \Delta\eta) - |\nabla_x \eta|^2)|\nabla_x u|^2 - \\ - 2\eta^2|\nabla_x^2 u|^2 - 4\eta\sum_{i,j=1}^n \eta_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}.\end{aligned}$$

  Sử dụng bất đẳng thức

$$\eta^2 u_{x_i x_j}^2 + 4\eta_{x_i}^2 u_{x_j}^2 \geq 4|\eta\eta_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}|$$

  ta có

$$(\partial_t - \Delta)(\eta^2|\nabla_x u|^2) \geq 2\left(\eta(\eta_t - \Delta\eta) + 3|\nabla_x \eta|^2\right)|\nabla_x u|^2 \leq C|\nabla_x u|^2,$$

  với $C = 2\max_{\bar{Q}_1}(|\eta(\eta_t - \Delta\eta)| + 3|\nabla_x \eta|^2)$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc n.

Từ các tính toán trên lấy $\alpha = C$ ta có (1.13). □

1.3.5 Bất đẳng thức Harnack

Ta bắt đầu bằng việc tính toán trên nghiệm đặc biệt (dịch chuyển của nghiệm cơ bản)

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$$

của phương trình truyền nhiệt $u_t - \Delta u = 0$ trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Với bất kỳ cặp điểm $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ có

$$\frac{u(x_1,t_1)}{u(x_2,t_2)} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n/2} e^{\frac{|x_2-\xi|^2}{4t_2} - \frac{|x_1-\xi|^2}{4t_1}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho $p/\sqrt{a}, q/\sqrt{b}$ và $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ với $p,q \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$ ta có

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} \geq \frac{(p+q)^2}{a+b}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $bp = aq$. Bất đẳng thức này dẫn đến, với $t_2 > t_1 > 0$

$$\frac{|x_2-\xi|^2}{t_2} \leq \frac{|x_2-x_1|^2}{t_2-t_1} + \frac{|x_1-\xi|^2}{t_1}$$

với dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\xi = \frac{t_2x_1 - t_1x_2}{t_2-t_1}.$$

Khi đó

$$\frac{u(x_1,t_1)}{u(x_2,t_2)} \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n/2} e^{\frac{|x_2-x_1|^2}{4(t_2-t_1)}},$$

với bất kỳ $x-1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ và $t_2 > t_1 > 0$. Bất đẳng thức này chính là bất đẳng thức Harnack. Dưới đây ta sẽ chỉ ra bất đẳng thức Harnack là tính chất chung cho tất cả các nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong toàn không gian. Ngoài ra chúng còn thỏa mãn bất đẳng thức Harnack dạng vi phân. Quay trở lại nghiệm đặc biệt trên để thấy dạng của bất đẳng thức Harnack dạng vi phân cho phương trình truyền nhiệt. Đặt $v = \ln u = -\frac{n}{2}\ln(4\pi t) - \frac{|x|^2}{4t}$. Tính toán ta có

$$v_t = -\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}, \nabla v = -\frac{x}{2t}.$$

Bất đẳng thức Harnack dạng vi phân trong trường hợp đặc biệt trở thành đẳng thức

$$v_t = \frac{n}{2t} - |\nabla v|^2 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Với nghiệm bất kỳ của phương trình truyền nhiệt trong toàn không gian ta có bất đẳng thức Harnack dạng vi phân sau.

Định lý 1.28. *Cho $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T])$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u > 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

Khi đó, nếu $v = \ln u$ thì

$$v_t - \frac{n}{2t} \geq |\nabla v|^2 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

Trước khi chứng minh bất đẳng thức Harnack dạng vi phân trên, ta sẽ dùng nó để dẫn đến bất đẳng thức Harnack.

Định lý 1.29. *Cho $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T])$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u > 0 \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

Khi đó với bất kỳ $x - 1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ và $t_2 > t_1 > 0$

$$\frac{u(x_1, t_1)}{u(x_2, t_2)} \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n/2} e^{\frac{|x_2 - x_1|^2}{4(t_2 - t_1)}}.$$

Chứng minh bất đẳng thức Harnack. Lấy $v = \ln u$ và đường cong $x = x(t), t \in [t_1, t_2]$ có hai đầu x_1, x_2. Sử dụng bất đẳng thức Harnack dạng vi phân

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} v(x(t), t) &= v_t + \nabla v \cdot \frac{dx}{dt} \geq |\nabla v|^2 - \frac{n}{2t} + \nabla v \cdot \frac{dx}{dt} \\ &\geq -\frac{1}{4}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 - \frac{n}{2t}.\end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \geq -\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

Cực tiểu hóa tích phân $\int_{t_1}^{t_2} |dx/dt|^2 dt$ ta có $x"(t) = 0$. Khi đó

$$x(t) = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} t + \frac{t_2 x - 1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}.$$

Tính toán trở lại

$$v(x_1, t_1) \leq v(x_2, t_2) + \frac{n}{2} \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right) + \frac{|x_1 - x_2|^2}{4(t_2 - t_1)}$$

hay ta có bất đẳng thức Harnack cần chứng minh. □

Ta chứng minh bất đẳng thức Harnack dạng vi phân như sau.

Chứng minh bất đẳng thức Harnack dạng vi phân. Lấy $\eta_0 \in C_0^\infty(B_1; [0,1])$ thỏa mãn $\eta_0 = 1$ trong $B_{1/2}$. Đặt $\eta(\cdot) = \eta_0(\cdot/R), R \geq 1$. Với mỗi $\alpha \in (0,1)$ ta sẽ tìm hằng số dương C_α để có bất đẳng thức sau

$$1 - \frac{2\alpha}{n} t\eta^2(\alpha|\nabla v|^2 - v_t) + \frac{C_\alpha t}{R^2} \geq 0 \text{ trong } B_R \times (0,T]. \tag{1.14}$$

Khi đó với mỗi $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$ cố định, lấy $R > |x|$, có (1.14). Cho $R \to \infty$, với chú ý $\eta = 1$ trong $B_{R/2}$, ta có

$$\alpha|\nabla v(x,t)|^2 - v_t(x,t) \geq \frac{n}{2\alpha t}.$$

Lại cho α tăng đến 1 ta thu được bất đẳng thức Harnack dạng vi phân cần chứng minh. Ta còn phải chứng minh (1.14).
Đặt $f = \alpha|\nabla v|^2 - v_t, g = t\eta^2 f$, ta có (1.14) trở thành

$$1 - \frac{2\alpha}{n} g + \frac{C_\alpha t}{R^2} \geq 0 \text{ trong } B_R \times (0,T].$$

Để chỉ ra (1.14) ta chỉ ra có hằng số dương C_α để

$$t\eta^2(g_t - \Delta g) + 2t(2\eta\nabla\eta - \eta^2\nabla v) \cdot g \leq g\left(1 - \frac{2\alpha}{n} g + \frac{C_\alpha t}{R^2}\right). \tag{1.15}$$

Thật vậy, bằng cách xét trên $B_R \times (\epsilon, T]$ rồi cho $\epsilon \to 0^+$ ta có thể giả sử u liên tục đến tận $t = 0$. Khi đó hàm

$$h(x,t) = 1 - \frac{2\alpha}{n} g + \frac{C_\alpha t}{R^2}$$

liên tục trên $\bar{B}_R \times [0,T]$. Giả sử không có (1.14), nghĩa là

$$\min_{\bar{B}_R \times [0,T]} h < 0.$$

Lại có

- khi $t = 0$ thì $h(x,t) = 1$,
- khi $|x| = R$ thì $h(x,t) = 1 + \dfrac{C_\alpha t}{R^2} \geq 1$.

Do đó có điểm $(x_0, t_0) \in B_R \times (0,T]$ để

$$h(x_0, t_0) < 0.$$

Khi đó

- $g(x_0,t_0) = \dfrac{n}{2\alpha}\left(1 + \dfrac{C_\alpha t_0}{R^2} - h(x_0,t_0)\right) > 0$
- $\nabla h(x_0,t_0) = 0$ hay $\nabla g(x_0,t_0) = 0$,
- $h_t(x_0,t_0) - \Delta h(x_0,t_0) \leq 0$ hay

$$g_t(x_0,t_0) - \Delta g(x_0,t_0) = \frac{n}{2\alpha}\left(\frac{C_\alpha}{R^2} - h_t(x_0,t_0) + \Delta h(x_0,t_0)\right) > 0.$$

Tại (x_0,t_0) có

$$t_0\eta^2(x_0,t_0)(g_t(x_0,t_0) - \Delta g(x_0,t_0)) +$$
$$+2t_0(2\eta(x_0,t_0)\nabla\eta(x_0,t_0) - \eta^2(x_0,t_0)\nabla v(x_0,t_0)) \cdot \nabla g(x_0,t_0) \geq 0,$$

$$g(x_0,t_0)\left(1 - \frac{2\alpha}{n}g(x_0,t_0) + \frac{C_\alpha t_0}{R^2}\right) < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (1.15). Như vậy điều giả sử sai hay ta chỉ còn phải chứng minh (1.15). Để chứng minh (1.15) ta chứng minh

$$f_t - \Delta f - 2\nabla v \cdot \nabla f \leq -\frac{2\alpha}{n}(f^2 + 2(1-\alpha)|\nabla v|^2 f). \tag{1.16}$$

Thật vậy, trước hết từ $g = t\eta^2 f, \eta$ chỉ phụ thuộc x, tính toán ta được

$$\begin{aligned} g_t =& \eta^2 f + t\eta^2 f_t, \\ \nabla g =& tf\nabla(\eta^2) + t\eta^2 \nabla f, \\ \Delta g =& tf\Delta(\eta^2) + 2t\nabla(\eta^2)\cdot\nabla f + t\eta^2\Delta f \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} t\eta^2 f_t =& g_t - \frac{g}{t}, \\ t\eta^2\nabla f =& \nabla g - \frac{\nabla(\eta^2)}{\eta^2} g, \\ t\eta^2\Delta f =& \Delta g - \frac{\Delta(\eta^2)}{\eta^2} g + 2\frac{\nabla(\eta^2)}{\eta^2}\cdot\left(\nabla g - \frac{\nabla(\eta^2)}{\eta^2}\right) \\ =& \Delta g - 2\frac{\nabla(\eta^2)}{\eta^2}\cdot\nabla g + \left(2\frac{|\nabla(\eta^2)|^2}{\eta^4} - \frac{\Delta(\eta^2)}{\eta^2}\right) g. \end{aligned}$$

Thay vào (1.16)

$$\begin{aligned} t\eta^2(g_t - \Delta g) + 2t(\nabla(\eta^2) - \eta^2\nabla v)\cdot\nabla g - \\ - \left(\eta^2 + 2t\frac{|\nabla(\eta^2)|^2}{\eta^2} - t\Delta(\eta^2) - 2t\nabla(\eta^2)\cdot\nabla v\right) g \leq \\ \leq -\frac{2\alpha}{n}(g^2 + 2t\eta^2(1-\alpha)|\nabla v|^2 g). \end{aligned}$$

Nhắc lại tính toán

$$\nabla(\eta^2) = 2\eta\nabla\eta, \Delta(\eta^2) = 2|\nabla\eta|^2 + 2\eta\Delta\eta$$

và dùng bất đẳng thức

$$t\nabla(\eta^2)\cdot\nabla v + \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}\eta^2|\nabla v|^2 \geq -\frac{n}{4\alpha(1-\alpha)} \times \frac{|\nabla(\eta^2)|^2}{\eta^2}$$

ta có

$$\begin{aligned} t\eta^2(g_t - \Delta g) + 2t(2\eta\nabla\eta - \eta^2\nabla v)\cdot\nabla g \leq \\ \leq g\left\{\eta^2 - \frac{2\alpha}{n} g + t\left(6|\nabla\eta|^2 - 2\eta\Delta\eta - \frac{n}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta|^2\right)\right\}. \end{aligned}$$

Lại có $\eta(\cdot) = \eta_0(\cdot/R), \eta_0 \in C_0^\infty(B_1)$ nên

$$\left(6|\nabla\eta|^2 - 2\eta\Delta\eta - \frac{n}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta|^2\right)(x) =$$
$$= \frac{1}{R^2}\left(6|\nabla\eta_0|^2 - 2\eta_0\Delta\eta_0 - \frac{n}{\alpha(1-\alpha)}|\nabla\eta_0|^2\right)(x/R).$$

Lấy

$$C_\alpha = \sup_{B_1}\left(6|\nabla\eta_0|^2 + 2|\eta_0\Delta\eta_0| + \frac{n}{\alpha(1-\alpha)|\nabla\eta_0|^2}\right)$$

ta có (1.15). Ta còn phải chứng minh (1.16).

Do $v = \ln u$ nên

$$v_t = \frac{u_t}{u}, \nabla v = \frac{\nabla u}{u}, \Delta v = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

Mà u là nghiệm của phương trình truyền nhiệt nên

$$v_t = \Delta v + |\nabla v|^2$$

hay

$$f = \alpha|\nabla v|^2 - v_t = -\Delta v - (1-\alpha)|\nabla v|^2.$$

Đặt $\omega = \Delta v, \tilde{\omega} = |\nabla v|^2$. Tính toán ta được:

$$\begin{aligned}\omega_t =& \Delta v_t = \Delta(\Delta v + |\nabla v|^2) = \Delta\omega + \Delta|\nabla v|^2\\ \Delta|\nabla v|^2 =& 2|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v\cdot\nabla(\Delta v) = 2|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v\cdot\nabla\omega\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_t =& 2\nabla v\cdot\nabla v_t = 2\nabla v\cdot\nabla(\Delta v + |\nabla v|^2)\\ =& \Delta|\nabla v|^2 - 2|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v\cdot\nabla\tilde{\omega}.\end{aligned}$$

Như vậy cả $\omega, \tilde{\omega}$ đều thỏa mãn phương trình tuyến tính

$$q_t - \Delta q - 2\nabla v\cdot\nabla q = -2|\nabla^2 v|^2$$

nên tổ hợp tuyến tính của nó $f = -\alpha\omega - (1-\alpha)\tilde{\omega}$ thỏa mãn

$$f_t - \Delta f - 2\nabla v\cdot\nabla f = -2\alpha|\nabla^2 v|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$|\nabla^2 v|^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i}^2) \geq \frac{1}{n}(\Delta v)^2$$

và

$$(\Delta v)^2 = (|\nabla v|^2 - v_t)^2 = ((1-\alpha)|\nabla v|^2 + f)^2 \geq f^2 + 2(1-\alpha)|\nabla v|^2 f.$$

Từ đây ta có (1.16). Ta đã hoàn thành chứng minh. □

Dùng bất đẳng thức (1.14) với $R = 1$ và chú ý $\eta_0 = 1$ trong $B_{1/2}$ ta thu được bất đẳng thức Harnack dạng vi phân cho miền không gian hữu hạn

Định lý 1.30. *Cho $u \in C^{2,1}(B_1 \times (0,1])$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u = 0, u > 0 \text{ trong } B_1 \times (0,1].$$

Khi đó với bất kỳ $\alpha \in (0,1), v = \ln u$ thỏa mãn

$$v_t - \alpha|\nabla v|^2 + \frac{n}{2\alpha t} + C \geq 0 \text{ trong } B_{1/2} \times (0,1],$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc n, α.

Bằng cách lấy tích phân đường, từ bất đẳng thức Harnack dạng vi phân ta thu được bất đẳng thức Harnack cho trường hợp miền không gian hữu hạn.

Định lý 1.31. *Cho $u \in C^{2,1}(B_1 \times (0,1])$ thỏa mãn*

$$u_t - \Delta u = 0, u \geq 0 \text{ trong } B_1 \times (0,1].$$

Khi đó với bất kỳ $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in B_{1/2} \times (0,1]$ và $t_2 > t_1$ ta có

$$u(x_1, t_1) \leq C u(x_2, t_2),$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc $n, t_2/t_1, (t_2 - t_1)^{-1}$.

Từ bất đẳng thức Harnack ta dẫn đến nguyên lý cực đại mạnh cho nghiệm không âm $u \in C^{2,1}(B_1 \times (0,1])$ của phương trình truyền nhiệt trong $B_1 \times (0,1]$. Cụ thể, nếu có $(x_0, t_0) \in B_1(0,1]$ để $u(x_0, t_0) = 0$ thì từ bất đẳng thức Harnack ta có $u = 0$ trong $B_1 \times (0, t_0)$. Kết hợp với tính liên tục của u ta có $u = 0$ trong $B_1 \times (0, t_0]$.

1.4 Phương trình không thuần nhất

Trong mục này ta quan tâm đến phương trình không thuần nhất

$$u_t - \Delta u = f \text{ trong} \Omega \times (0, \infty).$$

1.4.1 Phương trình không thuần nhất trên toàn không gian

Nhắc lại nhân nhiệt, hay nghiệm cơ bản

$$K(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Giống như trong phương trình Poisson, thay vì xét thế vị Newton ta xét

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,s) f(y,s) dy. \tag{1.17}$$

Từ tính chất của nhân nhiệt ta có

$$|u(x,t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} |f| \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,s) dy = t \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} |f|$$

nên nếu f bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ thì

$$\lim_{t \to 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,t) = 0.$$

Nếu chỉ có tính bị chặn của f thì u chưa chắc thuộc lớp $C^{2,1}$. Lý do từ những tính toán sau:

$$\begin{aligned}
\nabla K(x,t) &= -\frac{x}{2t(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, t > 0, \\
\nabla^2 K(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\frac{x}{2t} \otimes \frac{x}{2t} - \frac{1}{2t} Id \right), t > 0,
\end{aligned}$$

và, bằng cách đổi biến $x = 2z\sqrt{t}, t > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla K(x,t)| dx &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \frac{|z|}{\sqrt{t}} dz = \frac{C_n}{\sqrt{t}} \\
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 K(x,t)| dx &\geq \frac{1}{\pi^{n/2} t} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{|z|^2}{t} - 1 \right| e^{-|z|^2} dz = \frac{D_n}{t}.
\end{aligned}$$

Khi đó $|\nabla K| \in L^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ còn $|\nabla^2 K| \notin L^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ với bất kỳ $T > 0$. Do đó nếu $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ thì $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ và

$$\nabla u(x,t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K_{x_i}(x-y,s) f(y,s) dy,$$

$$|\nabla u(x,t)| \leq 2C_n \sqrt{t} \sup_{\mathbb{R}^n \times (0,t)} |f|.$$

Tuy nhiên nói chung $u \notin C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Ta cần tăng độ trơn của f nếu muốn $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Cụ thể ta có kết quả sau.

Định lý 1.32. *Cho f là hàm liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ với ∇f cũng là hàm liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ và u được xác định bởi* (1.17)*. Khi đó $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ và thỏa mãn phương trình*

$$u_t - \Delta u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$

cũng như điều kiện ban đầu

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Hơn nữa, nếu f có tất cả các đạo hàm riêng liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ thì u trơn trên $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Chứng minh. Trước hết ta giả sử $f, \nabla f$ là các hàm liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Bằng cách đổi biến $y = x + 2z\sqrt{t-s}$, nghiệm (1.17) trở thành

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} f(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz. \tag{1.18}$$

Từ tính bị chặn của f ta có ngay

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Từ tính bị chặn của ∇f ta có

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x,t) =& \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \partial_{x_i} f(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz \\ =& \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \frac{1}{2\sqrt{t-s}} \partial_{z_i} f(x + 2\sqrt{t-s}, s) dz. \end{aligned}$$

Chú ý $\lim\limits_{|z|\to\infty} e^{-|z|^2} = 0$, nên lấy tích phân từng phân tích phân trên ta được

$$u_{x_i}(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \frac{z_i}{\sqrt{t-s}} f(x + 2\sqrt{t-s}, s)dz.$$

Tiếp tục đạo hàm

$$u_{x_i x_j}(x,t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \frac{z_i}{\sqrt{t-s}} f_{x_j}(x + 2\sqrt{t-s}, s)dz.$$

Quay trở lại (1.18), đạo hàm theo t được

$$\begin{aligned} u_t(x,t) =& \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} f(x,t)dz + \\ &+ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \frac{1}{\sqrt{t-z}} z \cdot \nabla_x f(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dz. \end{aligned}$$

Từ tính bị chặn và liên tục của $\nabla_x f$ ta dẫn đến $u_t, u_{x_i x_j}$ là các hàm liên tục theo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Hơn nữa

$$u_t - \Delta u = f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Với giả thiết f có các đạo hàm riêng mọi cấp theo biến x liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, từ (1.18) ta có u có đạo hàm riêng mọi cấp theo x là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Lại có $u_t = \Delta u + f$ nên u_t và các đạo hàm riêng theo biến x của nó đều là hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Tiếp tục dùng

$$u_{tt} = \Delta u_t + f_t = \Delta(\Delta u + f) + f_t$$

ta có u_{tt} và các đạo hàm riêng theo biến x của nó cũng đều là hàm liên tục trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Cứ tiếp tục như này ta có u là hàm trơn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ khi f có các đạo hàm riêng của nó liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. □

Từ Định lý 1.4 và Định lý 1.32, với các giả thiết u_0, f như trong các Định lý này ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)u_0(y)dy + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,s)f(y,s)dy \end{aligned}$$

là nghiệm $C^{2,1}$ của bài toán

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u =& f \text{ trong } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) =& u_0 \text{ trên } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

1.4.2 Phương trình không thuần nhất trong miền bị chặn

Trong mục này ta xét miền Ω bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Để giải bài toán biên hỗn hợp cho phương trình không thuần nhất

$$u_t - \Delta u = f \text{ trong } \Omega \times (0,\infty), \tag{1.19}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \text{ trên } \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{1.20}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \text{ trên } \Omega \tag{1.21}$$

đòi hỏi khá nhiều kỹ thuật. Tôi chỉ trình bày lược đồ giải bài toán biên hỗn hợp này. Cũng giống bài toán giá trị ban đầu trên toàn không gian, ta cần đến nhân nhiệt.

Định nghĩa 1.2. Hàm $q \in C^{2,1}(\Omega \times \Omega \times (0,\infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [0,\infty))$ được gọi là nhân nhiệt của miền Ω nếu

$$\begin{aligned} q_t - \Delta_x q =& 0 \text{ trong } \Omega \times \Omega \times (0,\infty), \\ q(x,y,t) =& 0 \text{ khi } x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega q(x,y,t) f(x) dx =& f(y) \text{ khi } y \in \Omega, f \in C(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Mối quan hệ giữa nhân nhiệt trong Ω và nghiệm cơ bản

$$q(x,y,t) = K(x-y,t) + \mu(x,y,t)$$

trong đó $\mu(x,y,t)$, với mỗi $y \in \Omega$ cố định, là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} \mu_t - \Delta_x \mu =& 0 \text{ trong } \Omega \times (0,\infty), \\ \mu(\cdot,y,0) =& 0 \text{ trên } \Omega, \\ \mu(x,y,t) =& -K(x,y,t) \text{ khi } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned}$$

Nghiệm của bài toán này được cho bởi

$$\mu(x,y,t) = \int_0^t ds \int_{\partial\Omega} \Sigma(x,z,t-s)K(z,y,s)dS_z$$

trong đó

$$\Sigma(x,z,t) = 2\partial_{\nu_z}K(x-z,t) + 2\int\limits_0^t ds \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\nu_\zeta}K(x-\zeta,t-s)\sum_{i=1}^n S_i(\zeta,z,s)dS_\zeta,$$

với

$$\begin{aligned} S_1(x,z,t) =& 2\partial_{\nu_z}K(x-z,t), \\ S_{i+1}(x,z,t) =& 2\int_0^t ds \int_{\partial\Omega} S_i(x,z,t-s)\partial_{\nu_\zeta}K(\zeta-z,s)dS_\zeta. \end{aligned}$$

Với

$$f \in C(\bar{\Omega}\times[0,\infty)), g \in C(\partial\Omega\times[0,\infty)), u_0 \in C(\bar{\Omega})$$

nghiệm của bài toán (1.19)-(1.21) được cho bởi

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t ds \int_\Omega q(x,y,t-s)f(y,s)dy + \\ &+ \int_\Omega q(x,y,t)u_0(y)dy - \int_0^t ds \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y}q(x,y,t-s)g(y,s)dS_y. \end{aligned}$$